Matemática Elementar para Biocientistas

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

BIOLOGIA
licenciatura a distância

Matemática Elementar para Biocientistas

Sonia Palomino Bean

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Ministério da Educação

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

2ª Edição e 1ª Reimpressão
Florianópolis, 2014.

B367m Bean, Sonia Palomino.
Matemática elementar para biocientistas / Sonia Palomino Bean. — 2. ed. 1. reimp. — Florianópolis : BIOLOGIA/EAD/UFSC, 2014.
138p.

ISBN 978-85-61485-33-7

1. Funções elementares. 2. Equações de diferenças. 3. Modelos discretos em biologia. I. Título.

CDU 51-76

Catalogação na fonte elaborada na DECTI da Biblioteca da UFSC

Sumário

Apresentação

Este livro foi elaborado especialmente para alunos do curso de Biologia na modalidade a distância, cujos conteúdos fazem parte da nova grade curricular do curso de Ciências Biológicas da Universidade Federal de Santa Catarina.

É pouco comum encontrar referências em português que resolvam problemas de Biologia, Agronomia e áreas afins fazendo uso de conceitos matemáticos, então, conhecendo essa carência é que decidimos elaborar uma ementa que utilize o mínimo indispensável para um primeiro encontro de um aluno dessas áreas e a matemática. Os capítulos iniciais deste livro são conteúdos comuns em quase todas as disciplinas iniciais de matérias como Cálculo, Cálculo I ou Cálculo A, que se encontram num sem-número de livros didáticos elaborados com esta finalidade e geralmente direcionados para alunos de Engenharia ou Matemática. Nesse sentido, escrever os capítulos iniciais foi um pouco fazer a descoberta da pólvora, por isso, para se ter um diferencial, optou-se por elaborar da melhor forma possível muitas situações práticas nas quais determinada teoria fosse aplicada. Já, no capítulo sobre funções se apresentam recursos computacionais para auxiliar a visualização, a caracterização e as propriedades de cada uma. A partir desse ponto, usando uma abordagem determinística, é que inserimos conteúdos úteis para tratar problemas em Biologia, atingindo, dessa forma, o objetivo principal do livro: desde o início, conduzir o aluno ao entendimento dos modelos discretos, para que servem e como esses conteúdos têm aplicação em problemas da área, sem a intenção de aprofundar ou aprender com o rigor matemático que isso poderia significar.

Enfatizamos: não se exige rigor, e sim uma pequena formulação matemática e, sobretudo, uma boa dose de motivação do aluno para atingir o objetivo. Embora os modelos contínuos mostrem o caminho imediato para se estudar muitos problemas em Biomatemática, esses conteúdos e outros neste livro não são abordados, ainda que façam parte de uma disciplina inicial em Biomatemática para um aluno de graduação em Biologia no exterior. Nesse sentido, *e estando convictos de que nosso País deve acompanhar as transformações tecnológicas e científicas, sentimos a necessidade de estimular o estudante na sua graduação para que ele possa estar por dentro das conexões básicas que há entre matemática e biologia. Por isso é que apresentamos os conteúdos finais numa linguagem clara e no nível de um aluno das primeiras fases, para que ele possa aplicá-los na sua vida profissional.*

A autora.

CAPÍTULO 1

Conjuntos Numéricos

Neste capítulo, estudaremos noções básicas dos conjuntos numéricos e algumas de suas aplicações em diversas áreas, incluindo a Biologia. Segundo a formação que cada um possui, para alguns (ou muitos), essas noções serão uma revisão do que foi aprendido no Ensino Médio.

1.1 Introdução

A cada dia, sem percebermos, sempre estamos lidando com conjuntos numéricos, desde o conjunto dado pelo número de pessoas que há em cada uma das nossas famílias (que sempre é positivo), ou como conhecer o saldo nas nossas contas bancárias (que pode ser negativo e geralmente fica na forma decimal ou seu equivalente, usando frações, o que não é o mais comum), até querer saber quantas estrelas existem em nossa galáxia!

Sempre falamos que tal coisa "não existe" se alguém nos diz que existem peixes vivendo fora da água ou de que a cesta familiar vale um real, ou, sim "para todos", esse é um direito quando falamos que as crianças devem ter lugar nas escolas para ser alfabetizadas.

As palavras "não existe" e "para todos" na linguagem matemática têm uma simbologia própria muito usada na teoria de conjuntos. Nesses dois casos, precisamos identificar os conjuntos para depois simbolizar.

Assim, se P denota o conjunto de peixes vivendo fora da água e p é um peixe, elemento desse conjunto, se não existem peixes vivendo fora da água escreveremos da seguinte forma:

$$\nexists\, p \in P.$$

Seja C o conjunto de crianças em idade de ser alfabetizada. Um elemento desse conjunto será denotado por x, isto é, $x \in C$. Consideremos como E o conjunto de escolas de Ensino Fundamental e/ou Médio. Utilizando a frase "para todos", esse é um direito de toda criança quando falamos que todas as crianças devem ter um lugar na escola. O enunciado acima pode ser descrito matematicamente da seguinte forma:

$$\forall x \in C \Rightarrow x \in E.$$

Nos dois exemplos introduzimos alguns símbolos de Teoria de Conjuntos:

$\exists$: lê-se existe, é um símbolo quantificador;

$\nexists$: lê-se não existe, é um símbolo quantificador;

$\forall$: lê-se é para todos , é um símbolo quantificador;

$\in$: lê-se pertence, é um símbolo de pertinência;

$\Rightarrow$: lê-se então (ou implica), é um símbolo condicional;

P, C, E: são os conjuntos definidos acima.

Vejamos alguns exemplos:

a) A expressão $x+1=7$ então $x=6$ pode ser colocada matematicamente:

$$x+1=7 \Rightarrow x=6.$$

b) A sentença "existe um número x tal que $x+1=7$" se escreve matematicamente:

$$\exists x \,/\, x+1=7.$$

Assim, o valor que resolve a equação é dado por $x=6$.

c) A frase "para todo número z, z^2 é um número positivo" se escreve matematicamente:

$$\forall z, z^2 > 0.$$

Dessa forma, $z_1 = -0,5$ e $z_2 = -2$ satisfazem o enunciado. Também $z = \pi$ satisfaz o enunciado (embora conheçamos que o valor aproximado desse número é $3,1415\ldots$), pois sendo ele positivo, o quadrado desse valor se manterá positivo.

1.2 Quais e como são os conjuntos numéricos?

Nos exemplos colocados anteriormente, usamos elementos contáveis e não contáveis de um dado conjunto, e com isso iniciamos o estudo dos conjuntos numéricos. Para tal, haverá uma formalidade de matemática necessária de se estudar que colocaremos a seguir.

Os conjuntos numéricos estão dados pelos números naturais, números inteiros, números racionais, números irracionais, números reais e números complexos.

A **notação matemática** de cada um desses conjuntos é:

$\mathbb{N}$, o conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

$\mathbb{Z}$, o conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$\mathbb{Q}$, o conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,/\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

Neste caso, os números $-\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$ são números racionais por estarem representados na forma $\frac{p}{q}$ com p um inteiro e q um inteiro diferente de zero. Como $\frac{p}{q}$ é o mesmo que fazer a divisão $p \div q$, então números colocados na forma decimal representam também números racionais, pois eles são obtidos pela divisão dos números inteiros p e q. Exemplo disso é dado pelos números

$$\frac{1}{2} = 0,5\,,\ \frac{2}{3} = 0,6666666\ldots \text{ e } \frac{2}{7} = 0,285714285714\ldots$$

I, o conjunto dos números irracionais

Não há uma forma matemática que defina de forma exata como é cada elemento desse conjunto; apenas podemos dizer que não são números racionais.

Por exemplo, $\pi \in \mathbb{I}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, $e \in \mathbb{I}$ etc. As formas aproximadas desses números são:

$$\pi \approx 3{,}1415\,,\ \sqrt{2} \approx 1{,}4142\,,\ e \approx 2{,}7178\,.$$

$\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais

É a união dos conjuntos de números racionais e irracionais (ou a união de todos os outros conjuntos):

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}\,.$$

Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, isto é, um número natural é um inteiro (não inclui os negativos) e um inteiro é um racional (se escolhemos $q = 1$), então $\mathbb{Q} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}$, assim:

$$\mathbb{R} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}\,.$$

Qualquer número de um conjunto numérico pode ser alocado na reta numérica. A Figura 1.1 mostra, na primeira reta, o caso de números naturais e inteiros; já na segunda reta colocamos números racionais e irracionais.

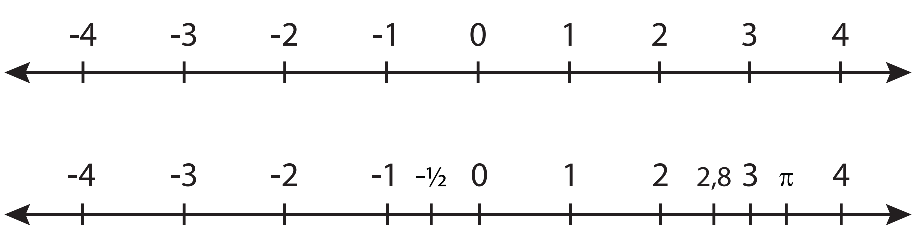
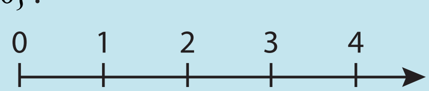


Figura 1.1: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ na reta numérica.

Muitas vezes precisamos trabalhar com subconjuntos de conjuntos numéricos. Por exemplo, os números reais não positivos ou não negativos. Denotaremos isso da seguinte forma:

$\mathbb{R}^+$ é o conjunto de todos os números reais não negativos ou $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0\}$.



$\mathbb{R}^-$ é o conjunto de todos os números reais não positivos ou $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 0\}$.

São subconjuntos de números reais, pois $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$.

Os números inteiros e racionais (não negativos ou não positivos) podem ser caracterizados de ***forma similar***.

Caro(a) estudante, você pode responder quais são essas formas?

Um outro conjunto numérico que inclui todos os anteriores são:

$\mathbb{C}$, os números complexos

$$\mathbb{C} = \{a + ib \,/\, a, b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\},$$

dessa forma $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ao considerarmos $b = 0$ para todo valor de a. Embora você possa conhecer como operar nesse conjunto, nesta parte do livro, esse conhecimento não é prioridade.

1.3 Operações definidas nos conjuntos numéricos

Com quais operações estamos familiarizados ao trabalhar com números? Vejamos.

Em $\mathbb{N}$ podemos somar e multiplicar; ao fazer essas duas operações, sempre obtemos um número natural. Exemplo $2 + 4 = 6$ e $3 \times 5 = 15$.

Já nos números inteiros podemos subtrair, além de somar e multiplicar. De fato $3 - 4 = -1$ e, qualquer que seja a operação entre dois números inteiros, essa expressão nos fornece como resultado um número inteiro.

Em $\mathbb{Q}$ temos quatro operações: soma, subtração, multiplicação e divisão. De novo, a operação entre dois racionais nos dá como resultado um número racional. Por exemplo, $1 - \left(\frac{3}{8} : \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}$ é um ***número racional***.

Caro(a) aluno(a), você poderia informar qual é esse número?

Finalmente, com números reais, $\mathbb{R}$, podemos estabelecer cinco operações: soma, subtração, multiplicação, divisão e radiciação.

Observamos apenas que há algumas condições para que a radiciação de um número seja possível (veja o apêndice ao finalizar este capítulo). Por exemplo, não será possível extrair raiz quadrada de números negativos, mas poderemos extrair raiz cúbica de qualquer número (positivo ou negativo). O ***número real a*** é o resultado obtido ao fazermos as seguintes operações dos números: $a = \left(\sqrt{6} - \sqrt[3]{-2}\right)\left(\frac{2}{5} \times 1{,}3\right)$.

Você pode nos dizer o valor desse número usando a calculadora?

1.4 Padrões numéricos e geométricos

Nesta seção trabalharemos com os conjuntos numéricos acima definidos para mostrar que eles encontram-se sob a forma de padrões em várias áreas do conhecimento, acontecendo também no caso da biologia.

Por exemplo, ao se ter o conjunto de números naturais $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...\}$, os números do conjunto parecem estar dispostos ao acaso, porém possuem uma regra (padrão ou fórmula). Os elementos desse conjunto são conhecidos como os famosos **números de Fibonacci**.

Como eles são obtidos?

Eles são obtidos de uma forma recorrente. Vejamos: dados os dois primeiros números, 1 e 1, ao somá-los obtemos o terceiro, $1+1=2$. O quarto número será obtido na soma do segundo com o terceiro, ou seja, $1+2=3$. O quinto número será o resultado da soma do terceiro e do quarto número, $2+3=5$. Continuamos dessa forma para obter qualquer outro número do conjunto.

Embora usemos apenas padrões de tipo numérico e geométrico, é conveniente conhecer que também há outros tipos de padrões, tais como de simetria, de rotação, de crescimento ou os padrões sonoros, de movimento, de comportamento etc. Devlin (2002) afirma que a matemática é a ciência dos padrões e que "o que o matemático faz é examinar padrões abstratos, e que eles podem ser reais ou imaginários, visuais ou mentais".

Padrões, número e álgebra são questões colocadas no artigo *Os padrões no ensino e aprendizagem do número e álgebra* (elaborado pela autora Isabel Vale (2006), da Escola Superior de Educação de

Viana do Castelo, além de outros colaboradores de instituições portuguesas), em que há a exemplificação dos padrões encontrados na natureza, como o padrão das marés, dos componentes do DNA animal ou da disposição de folhas no caule de algumas plantas (o que leva aos números de Fibonacci citados anteriormente).

Num parágrafo desse artigo, os autores argumentam que os professores, ao apelarem para o ensino dos padrões, querem que seus alunos aprendam uma matemática significativa, além de quererem "envolver-se na sua aprendizagem facultando-lhes um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com a sua realidade e experiências, [...] apoiando os estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões e fazerem generalizações e também previsões." (VALE et al., 2006)

Voltando à nossa conversa dos números de Fibonacci dados pelos elementos do conjunto $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots\}$, existem algumas relações entre esses números que nos levam a conhecê-los, como o número de ouro (seção ou razão áurea ou número da divina proporção) usado, desde a época dos egípcios, para a construção das suas pirâmides, passando pela construção do Partenon feita pelos gregos, chegando à arte renascentista de Leonardo da Vinci, com o seu famoso Homem Vitruviano, e até os dias de hoje, se consideramos as medidas do cartão de crédito.

Exemplos de aplicações do número de ouro se encontram em áreas como biologia, física, finanças e em várias situações da vida. Aqui fornecemos uma lista parcial de exemplos:

a) Estudo genealógico de coelhos;

b) Estudo genealógico de abelhas;

c) Comportamento da luz;

d) Comportamento de átomos;

e) Crescimento de plantas;

f) Ascensão e queda em bolsas de valores;

g) Probabilidade e estatística;

h) Curvas com a forma espiralada como: *Nautilus* (marinho), galáxias, chifres de cabras da montanha, marfins de elefantes, filotaxia, rabo do cavalo marinho, onda no oceano, furacão etc.

Ao desenvolver o conteúdo de padrões geométricos, o que fazemos é apenas alertar ao(à) leitor(a) sobre o quanto vivemos imersos num espaço onde as geometrias plana e espacial estão em toda parte. Dessa geometria, observamos os padrões que podemos encontrar. Aqui, não é a nossa intenção estudar os muitos conceitos que a geometria tem, pois não faz parte desta disciplina. O padrão geométrico mais conhecido por todos é a forma circular (um anel, a cara do primeiro boneco desenhado nas nossas experiências de criança), outro padrão é a forma arredondada (uma laranja, uma bola, a superfície térrea ou a lunar). Um padrão mais sofisticado é dado pela forma hexagonal dos favos de uma colmeia (com eles podem ser explorados noções de ângulos, vértices, faces, arestas, áreas e volume). Outros padrões que podemos citar são as espirais encontradas nas conchas de moluscos, as formas irregulares da teia de aranha, a casca do abacaxi, a simetria que se observa nas asas das borboletas, no corpo de uma coruja ou na forma de algumas plantas. Assim, ao pensarmos em padrões geométricos e olharmos o nosso entorno, encontramos muitos exemplos na flora e fauna. Quer dizer que o nosso cotidiano está cheio de padrões desse tipo, apenas não nos preocupamos em observá-los.

Resumo

Neste capítulo, colocamos de uma forma sucinta conteúdos que tratam sobre conjuntos numéricos, padrões numéricos e geométricos. Junto a exemplos do cotidiano se exibem problemas que podem ser colocados numa forma simbólica usando símbolos matemáticos. Com essa motivação, levamos você no caminhar dos vários tipos de conjuntos que se encontram no seu dia a dia, além de, aproveitando-se da percepção geométrica, associar questões de biologia ligadas ao mundo matemático.

Exercícios

1. Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

    a) $2-3 \in \mathbb{N}$.

    b) $\frac{3}{4}+\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$.

    c) $1+\pi \in \mathbb{I}$.

    d) $3n \in \mathbb{N}$ se n é inteiro.

    e) $5n \in \mathbb{Z}$ se n é natural.

    f) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_{-} = \mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}_{-}$ é o conjunto de todos os inteiros não positivos $\{\ldots,-4,-3,-2,-1,0\}$.

    g) $-2,456456456\ldots$ não é um número real.

2. Dizemos que um número inteiro p diferente de zero, um e menos um é primo se seus divisores são 1, -1, p e $-p$. Por exemplo -5, 2, -19 são números primos. Quais dos seguintes números não são primos: $1, 11, -6, 0, 37, 63, 35$?

3. Números irracionais podem ser obtidos calculando $\sqrt{p}$ de um número primo e positivo. Usando a calculadora, encontre cinco números irracionais.

4. Como exercício, exemplifique outros padrões geométricos não apresentados neste capítulo.

Bibliografia comentada

Matemática finita

Nesse livro você encontrará mais assuntos sobre os conjuntos numéricos, utilizando uma maior formalidade junto a variados exercícios para a fixação dos conteúdos.

LIPSCHUTZ, S. *Matemática finita*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1972. (Coleção Schaum).

Os números da natureza

Essa referência, nos seus múltiplos exemplos, leva o aluno ao conhecimento de cada conjunto numérico, valendo-se dos conhecimentos das outras áreas das ciências.

STEWART, I. *Os números da natureza*. Ciência Atual, 1995.

Matemática: a ciência dos padrões

Esse livro serve para ampliar as questões de ensino e aprendizagem frente aos diversos padrões encontrados nas ciências.

DEVLIN, K. *Matemática:* a ciência dos padrões. Porto: Porto Editora, 2002.

Os padrões no ensino e aprendizagem do número e álgebra

Um artigo muito útil para entender o processo de ensino-aprendizado através de padrões e números.

VALE, Isabel; PALHARES, Pedro; CABRITA, Isabel; BORRALHO, António. *Os padrões no ensino e aprendizagem do número e álgebra*. Lisboa, 2006. Disponível em: <www.ese.ipvc.pt/numalgebra/PDF/G2.pdf>. Acesso em: 22 out. 2007.

Apêndice - Radiciação

É mais uma operação utilizada apenas no conjunto de números reais. Lembre que nele temos os racionais e irracionais. Nesse último conjunto, o número $\sqrt{2}$ é irracional.

É comum dizer que a radiciação é a operação inversa da potenciação, por exemplo $\sqrt{9}=3$ pois $3^2=9$ (potência inteira), e não se comenta o que acontece com $\left(\sqrt{2}\right)^2$ pois $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2=2$, porque na verdade se trata de uma potência fracionária.

Os seguintes exemplos mostram como extrair raízes usando potências inteiras.

Vejamos:

1. Ache a raiz cúbica do número 27 $\left(\sqrt[3]{27}\right)$. Devemos nos perguntar qual o número que, multiplicado por ele mesmo três vezes, resulta o número 27, ou seja, qual o número que elevado à potência 3 é o número 27?

   Solução:

   É o número 3, pois: $3^3=3\times3\times3=27$.

2. Encontre a raiz cúbica do número -64 $\left(\sqrt[3]{-64}\right)$. Perguntamo-nos qual é o número que multiplicado por ele mesmo três vezes resulta o número -64, ou seja, qual o número que elevado à potência 3 resulta o número -64?

   Solução:

   É o número -4, pois: $(-4)^3=-4\times-4\times-4=-64$.

3. Raiz quadrada do número 16 é ±4, pois $(+4)^2=16$ e $(-4)^2=16$.

   Observe os termos da radiciação:

$$\sqrt[n]{a},\quad n>0.$$

Onde:

$n =$ representa o termo da radiciação chamado radical ou índice da raiz (um inteiro positivo);

$a =$ representa o termo da radiciação chamado de radicando; e $\sqrt{\ }$ é o símbolo de raiz ou sinal de raiz ou simplesmente radical.

Quando afirmamos que a radiciação é a operação inversa da potenciação, queremos dizer que:

$$b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}, \quad n > 0.$$

Algumas vezes facilitamos os cálculos com radiciação ao usarmos a seguinte forma:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad n > 0.$$

Nota

Quando n é par, o valor de a deve ser positivo. Já no caso de ser ímpar, não importa se a é positivo ou negativo.

Veja os exemplos:

a) $\sqrt[4]{64} = 64^{\frac{1}{4}} = \left(8^2\right)^{\frac{1}{4}} = 8^{\frac{2}{4}} = 8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}$. Outra forma de obtermos o mesmo resultado: $\sqrt[4]{64} = 64^{\frac{1}{4}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}$.

b) $\sqrt[3]{-27} = \left(-27\right)^{\frac{1}{3}} = \left(-3^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(-3\right)^{\frac{3}{3}} = -3^1 = -3$.

Desigualdades ou Inequações

Neste capítulo, estudaremos o valor absoluto de um número, intervalos e desigualdades (ou inequações) com suas propriedades e resoluções.

2.1 Desigualdades ou inequações

No capítulo anterior, usando conjuntos numéricos, vimos que o conjunto de números reais é a união de números racionais e irracionais. Nesta seção, estudaremos como obter subconjuntos de números reais diferentes de $\mathbb{R}^{+}$ ou $\mathbb{R}^{-}$.

Um exemplo prático que nos leva a obter um subconjunto de números reais é conhecer que o preço de 1 kg de pão geralmente se encontra entre 4 e 5 reais (ou talvez seja um valor maior!). Assim, se x representa o valor de 1 kg de pão, podemos expressar isso da seguinte forma:

$$4{,}0 \leq x \leq 5{,}0 \text{ ou } 4 \leq x \leq 5 \text{ ou } x \in [4,5].$$

Acabamos de exemplificar o que definiremos como um intervalo de números.

Intervalo

Definição: Dados os números reais a e b, com $a < b$, um intervalo em $\mathbb{R}$ é um conjunto infinito de números com ou sem limite superior e/ou inferior. Se os limites estão incluídos, diremos que o conjunto é um intervalo fechado, caso contrário, estaremos definindo um intervalo aberto.

Matematicamente, escrevemos:

a) Um intervalo fechado:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}.$$

b) Um intervalo aberto:

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R} / a<x<b\}.$$

c) Um intervalo semiaberto ou semifechado:

$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R} / a<x\le b\},\ (-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R} / x\le a\},$$

$$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R} / x<a\},\ (a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} / x>a\},$$

$$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} / x\ge a\} \text{ ou } [a,b)=\{x\in\mathbb{R} / a\le x<b\}.$$

Nota: O símbolo ∞ **se lê infinito**, significa que os números no intervalo ilimitado se prolongam indefinidamente à direita do número a, por exemplo se $a=1$ teremos o intervalo $(1,\infty)$. Ao colocarmos o sinal menos nesse símbolo, $-\infty$, significa que os números no intervalo ilimitado se prolongam indefinidamente à esquerda de um número dado, por exemplo $(-\infty,4)$.

Em alguns livros você poderá verificar que alguns autores denotam $]a,b]$ e $]a,b[$ como $(a,b]$ e (a,b), respectivamente. Por exemplo:

São intervalos os conjuntos:

$$[2,3], (-2,\infty), (1,5), (-\infty,3),$$

onde

$$(-2,\infty)=\{x\in\mathbb{R} / x>-2\};$$

$$(-\infty,3)=\{x\in\mathbb{R} / x<3\};$$

$$(1,5)=\{x\in\mathbb{R} / 1<x<5\}.$$

Pode denotar o conjunto que falta?

As **desigualdades**, conhecidas também como **inequações**, são aquelas expressões numéricas que envolvem incógnitas $x, y, t, \ldots$ e que precisam ser resolvidas. A ideia é encontrar o conjunto de números reais onde a incógnita se encontra. Muitas vezes essas expressões numéricas estão associadas a um dado problema ou situação prática.

Vejamos o seguinte exemplo:

No problema do pão, citado anteriormente, gostaríamos de saber em que faixa de preços se encontra o valor de 1 kg de pão, se paguei entre 8 e 9,4 reais pela compra de dois quilogramas do produto.

Solução:

Considerando a variável p como sendo o preço de 1 kg de pão e tendo como informação que $2p \leq 9{,}4$ e ao mesmo tempo $2p \geq 8$, podemos deduzir que p é menor que a metade de 9,4, e ao mesmo tempo, p é maior que a metade de 8. Isto é,

$$p \leq 4{,}7 \text{ e } p \geq 4 \text{, ou seja:}$$

$$4 \leq p \leq 4{,}7 \text{ ou } p \in [4,\ 4{,}7].$$

O preço de 1 kg de pão é maior ou igual a 4 e menor ou igual a 4,7 reais e o intervalo solução do problema é $[4,\ 4{,}7]$.

Vejamos outros:

- Dado o enunciado: "Dentre todos os elementos químicos existentes na natureza, cerca de 30 a 40 são necessários para os seres vivos." Nesse caso, se considerarmos n_e como sendo o número dos elementos químicos necessários para os seres vivos, temos:

  $$30 \leq n_e \leq 40$$

  a variável n_e fica alocada ou pertence ao intervalo $[30, 40]$.
- Uma outra situação prática na qual precisamos usar inequações é encontrar a temperatura final de uma mistura de água ou problemas de reações químicas, você poderia indicar como?

2.2 Módulo de um número real

O módulo ou distância entre dois números reais a e b é um número positivo dado pela diferença entre eles da seguinte forma:

$$|a-b| = \begin{cases} a-b, & a-b \geq 0, \\ -(a-b), & a-b < 0 \end{cases}$$

Assim, quando $b = 0$, a origem da reta numérica, a distância entre a e essa origem, $|a-0| = |a|$. O módulo de a será:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

Por exemplo, se $a = 2$, $|2| = 2$; se $a = -2$, $|-2| = 2$.

Já no caso de termos $a = -2$ e $b = 3$, $|a - b| = |-2 - 3| = |-5| = 5$.

Graficamente, isso pode ser representado da seguinte maneira:

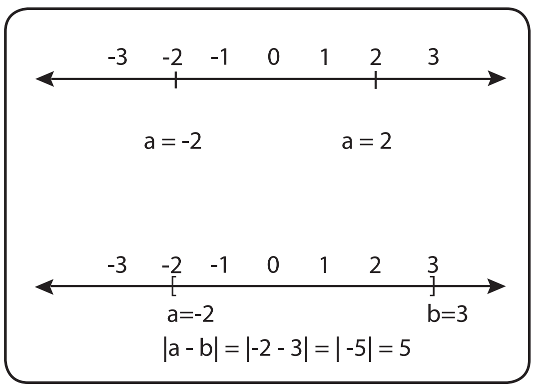


Figura 2.1: Reta numérica e módulo de um número.

Passemos agora ao seguinte exemplo :

Se x é uma variável real e conhecemos que $|2x - 5| = 4$, gostaríamos de saber qual ou quais são os valores de x que satisfazem a equação.

Solução:

1º método:

Pela definição do valor absoluto de um número, temos duas possibilidades:

$2x - 5 = 4$ se $2x - 5 > 0$ ou $2x - 5 = -4$ se $2x - 5 < 0$. Ou seja: $x = \frac{9}{2}$ se $2x - 5 > 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ se $2x - 5 < 0$. Equivalente a: $x = \frac{9}{2}$ se $x > \frac{5}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$ se $x < \frac{5}{2}$.

Como ambas as expressões são verdadeiras, teremos duas soluções: $x = \frac{9}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$.

2º método:

Elevando ao quadrado a equação matemática, eliminamos as barras entre $(2x-5)$ (o quadrado de um número é sempre positivo):

$$(|2x-5|)^2 = (2x-5)^2 = 4^2 \text{, ou } (2x-5)^2 - 4^2 = 0.$$

Assim, pela diferença de quadrados: $(2x-5-4)(2x-5+4)=0$ ou $(2x-9)(2x-1)=0$, obtemos o resultado $x=\dfrac{9}{2}$ e $x=\dfrac{1}{2}$.

Nos dois métodos desse exemplo usamos propriedades com desigualdades sem perceber. Elas serão listadas logo a seguir.

2.3 Propriedades das inequações (ou desigualdades)

Atrelada à prática dos exercícios, há uma justificativa formal matemática envolvida toda vez que tratamos com inequações. Elas são dadas na seguinte lista:

1. $a<b \Rightarrow a+c<b+c$, c qualquer;
2. $a<b$ e $c<d \Rightarrow a+c<b+d$;
3. $a<b$ e $b<c \Rightarrow a<c$;
4. Se $c>0$, então $a<b \Leftrightarrow ac<bc$ (e o equivalente no caso $\leq$);
5. Se $c<0$, então $a<b \Leftrightarrow ac>bc$ (e o equivalente no caso $\geq$);
6. $0<a<b$ e $0<c<d \Rightarrow ac<bd$;
7. Se a e b são não negativos, então $a<b \Rightarrow a^2<b^2$;
8. $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$, $a>0$ (e o equivalente no caso $\leq$);
9. $|x|>a \Leftrightarrow x<-a$ ou $x>a$, $a\geq 0$ (e o equivalente no caso $\geq$);

Muitas vezes, precisaremos usar as seguintes propriedades em módulo:

10. $|a.b|=|a||b|$; $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$, $b\neq 0$;
11. $|a+b|\leq|a|+|b|$; a,b quaisquer;
12. $|a|=\sqrt{a^2}$, a qualquer.

Usando essas propriedades, será possível resolver qualquer exercício de desigualdades. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo *a*:

Especificando as propriedades usadas, resolver $y+3<5$.

Solução:

Usando a propriedade 1, somamos ambos os lados da desigualdade por $c=-3$:

$$y+3-3<5-3$$
$$y+0<2$$

obtendo

$$y<2.$$

O conjunto solução vem dado pelos valores $y\in(-\infty,2)$.

Exemplo *b*:

Encontrar o conjunto solução ao resolver $|x+5|>4$.

Solução:

Usamos a propriedade 9, observando que o lado direito é o número positivo $a=4$. Aplicando a propriedade: $x+5>4$ ou $x+5<-4$. Ao usar a propriedade 1, somamos o valor $c=-5$, obtemos $x>-1$ ou $x<-9$, ou seja $(-\infty,-9)\cup(-1,\infty)$. O resultado é equivalente se colocamos que $x\in\mathbb{R}\setminus[-9,-1]$ (tiramos o conjunto $[-9,-1]$ dos números reais).

Exemplo *c*:

Resolver $\dfrac{t-6}{t+3}>0$. Temos o quociente de dois números.

Solução:

Em primeiro lugar $t\neq-3$.

1º método:

Consideramos o quociente de dois números positivos. Dessa forma, o numerador, $t-6$, e o denominador, $t+3$, ambos devem ser positivos ou negativos. Vejamos.

a) Se $t-6>0$ e $t+3>0$. Usando a propriedade 1, obtemos $t>6$ e $t>-3$. O conjunto interseção desses valores dá como resultado $t>6$ ou $t\in(6,\infty)$.

Ou:

b) Se $t-6<0$ e $t+3<0$. Usando a propriedade 1, obtemos $t<6$ e $t<-3$. O conjunto interseção desses valores dá como resultado $t<-3$ ou $t\in(-\infty,-3)$.

A solução do exemplo será a união dos conjuntos obtidos em a) e b)), considerando que $t\neq -3$. Como os conjuntos são disjuntos e -3 é um extremo não incluído no intervalo, a solução é indicada por: $t\in(-\infty,-3)\cup(6,\infty)$.

Do exemplo anterior, obtemos uma regra prática e útil para resolver outros tipos de inequações. Consideramos os ***zeros*** do numerador e do denominador (lembre-se de que os zeros do denominador não estão incluídos no conjunto!). Ordenamos esses zeros na reta numérica e avaliamos a expressão num valor entre cada zero, fornecendo, dessa forma, um sinal + ou −. Escolhemos os intervalos que tenham o sinal requerido e por último unimos esses conjuntos. Vejamos no exemplo em que consiste esse método.

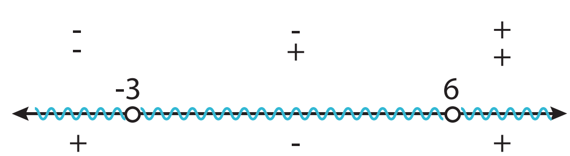
Os zeros são aqueles valores que anulam os fatores de uma expressão. Assim, os zeros de $(x-a)(x-b)(x-c)$ são $x=a$, $x=b$ e $x=c$. Por exemplo, os zeros de $\dfrac{(x+5)(x+3)}{x-1}$ são $x=-5$, $x=-3$ e $x=1$.

A escolha $x=1$ (que anula o fator do denominador) dependerá do enunciado do exercício.

2º método:

As raízes do quociente $\dfrac{t-6}{t+3}$ são 6 para o numerador e -3 para o denominador. Não esqueçamos que $t\neq -3$. Na reta numérica ***esses valores*** definem os intervalos $(-\infty,-3)$, $(-3,6)$ e $(6,\infty)$.

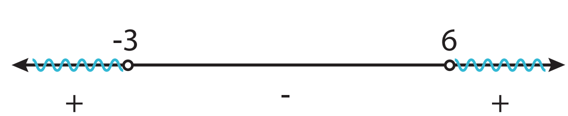
Colocamos os valores na reta numérica de forma ordenada.



Escolhendo os valores -4, 0, 7 correspondentes a cada um desses intervalos, avaliamos a expressão dada e obtemos:

$$\frac{-4-6}{-4+3}=10,\ \frac{0-6}{0+3}=-2 \text{ e } \frac{7-6}{7+3}=0{,}1.$$

Ou seja, encontramos os valores positivo, negativo e positivo, $+-+$. Como a inequação proposta tem sinal positivo, a resposta será dada pelos intervalos onde obtivemos os valores positivos: $t\in(-\infty,-3)\cup(6,\infty)$. Observe o gráfico.



2.4 Problemas práticos que envolvem inequações

Vejamos o seguinte exemplo:

O peso de um vitelo ao nascer é de 5 kg. Qual será o peso dele quando incrementar pelo menos 70% do seu peso inicial?

Solução:

Consideremos como v a variável peso do vitelo, isto é:

$v =$ peso do vitelo em quilogramas;

$peso\,inicial = 5\,\text{Kg}$;

$peso\,inicial + \frac{70}{100} \times (peso\,inicial)$ é o peso mínimo que o vitelo deve atingir, assim, qualquer valor do peso do vitelo será maior ou igual a esse, isto é,

$$v \geq 5 + 0{,}7 \times 5\,.$$

A solução será:

$$v \geq 8{,}5$$

Ou seja, o peso (final) do vitelo é maior ou igual a 8,5 kg.

No exemplo a seguir usaremos as propriedades passo a passo para exibir dentro deste texto o que você encontrou nos exemplos anteriores.

Consideremos que o animal deixa de ser vitelo nas condições do exemplo anterior (isto é, se incrementar pelo menos 70% do seu peso inicial) e quando o dobro do peso final for menor ou igual a 30 kg acrescido à metade do respectivo peso final. Procurar a faixa de pesos (isto é, o intervalo) em que o vitelo deve ficar para ir ao abate.

Solução:

Nossa variável agora é o peso final do vitelo: v_f.

Pelo exemplo anterior, o peso final $v_f \geq 8{,}5$.

Do enunciado $2v_f \leq 30 + \frac{v_f}{2}$.

Usando as propriedades das desigualdades, encontramos que

$$2v_f - \frac{v_f}{2} \leq 30 \quad \text{(prop. 1)}$$

$$\frac{3v_f}{2} \leq 30.$$

$$2.\left(\frac{3v_f}{2}\right) \leq 2.(30) = 60 \ \text{(prop. 4)}$$

$$3v_f \leq 60$$

$$\frac{1}{3}.(3v_f) \leq \frac{1}{3}.(60) = 20. \ \text{(prop. 4)}$$

$$v_f \leq 20.$$

A interseção dos conjuntos $v_f \leq 8{,}5$ e $v_f \leq 20$ dá como resultado o seguinte intervalo:

$$v_f \in [8{,}5,\ 20]$$

Resumo

Utilizando os conceitos estudados no capítulo anterior, neste capítulo definimos os intervalos que nos mostram como expressar soluções de desigualdades. Estudamos também o módulo de um número real e resolvemos diversos exemplos usando várias propriedades das desigualdades. Exemplos práticos exibem como essa teoria faz parte de diversas áreas de estudo da ciência.

Exercícios

1. Usando as propriedades, resolva:

   a) $3 - x < 5 + 3x$;

   b) $1 - x - x^2 \geq 0$;

   c) $x^3 + 1 > x^2 + x$;

   d) $\dfrac{5}{x} < \dfrac{3}{4}$.

2. Encontre o conjunto solução das seguintes inequações:

   a) $x^3 + 1 < x^2 + x$;

   b) $\dfrac{3}{x-5} \leq 2$;

   c) $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{3}{x-2}$;

   d) $\left|\dfrac{2+x}{3-x}\right| > 4$;

   e) $\dfrac{1}{|x+1||x-3|} \geq \dfrac{1}{5}$;

   f) $\left|\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right| < 1$;

   g) $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{x}{x-2}$;

   h) $\dfrac{10}{3} < |x| + \dfrac{1}{|x|} < \dfrac{26}{5}$;

   i) $|5x - 4| \leq |x - 5|$.

Bibliografia comentada

Cálculo A

Esse livro, além da teoria aqui apresentada, traz outros conteúdos próprios.

FLEMMING, D.; GONÇALVES, M. *Cálculo A*. São Paulo: Makron Books, 1992.

Cálculo 1

É um livro didático muito bom, que serve de complemento da teoria aqui apresentada.

KÜHLKAMP, N. *Cálculo 1*. Florianópolis: Editora da UFSC, 2001.

Funções

Neste capítulo, estudaremos o conceito de função e os tipos de funções existentes. Priorizaremos o estudo daquelas funções definidas em um conjunto discreto de elementos (finito ou infinito).

Embora este capítulo pareça ser independente dos anteriores, você observará que não é mais que uma extensão dos conteúdos, uma vez que, ao se deparar com a utilização da reta numérica do capítulo anterior, aqui verá a necessidade de usar duas retas numéricas e que ambas serão alocadas perpendicularmente, dando, assim, origem ao plano cartesiano e aos conceitos de par ordenado, relações etc.

Diferente dos outros, este capítulo é o que mais aplicabilidade tem em muitas áreas do conhecimento e problemas relacionados com o nosso cotidiano. Chegaremos ao conceito de função como um caso particular de como uma relação é definida. Os vários exemplos mostrarão os tipos de funções existentes. Dessa forma, estaremos preparando o caminho para o que é mais importante neste texto: os modelos discretos do próximo capítulo.

3.1 Produto cartesiano e relações

3.1.1 Par ordenado e plano cartesiano

Sejam x e y números reais quaisquer, denominamos par ordenado a dupla ordenada dos números x e y nessa ordem. Será denotado por

$$(x,y) \text{ com } x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}.$$

O número x é denominado abscissa e y é chamado ordenada.

Por exemplo:

- $(2,3)$ é o par ordenado com abscissa 2 e ordenada 3;
- $\left(-3,\dfrac{2}{5}\right)$ é o par ordenado com abscissa -3 e ordenada $\dfrac{2}{5}$;
- $(-3,0)$ é o par ordenado com abscissa -3 e ordenada 0;
- $(0,0)$ é o par ordenado com abscissa 0 e ordenada 0;
- $(\pi,2)$ é o par ordenado com abscissa π e ordenada 2.

Plano cartesiano

Cada ponto P do plano pode ser associado com um par ordenado (x,y) de forma única. Essa associação pode ser feita geometricamente da seguinte forma:

Defina um ponto de referência O como a origem e trace, a partir dele, duas retas cartesianas perpendiculares entre si, cujo ponto de interseção é a origem O, definido com coordenadas nulas, isto é, $O(0,0)$.

Visualizemos isto:

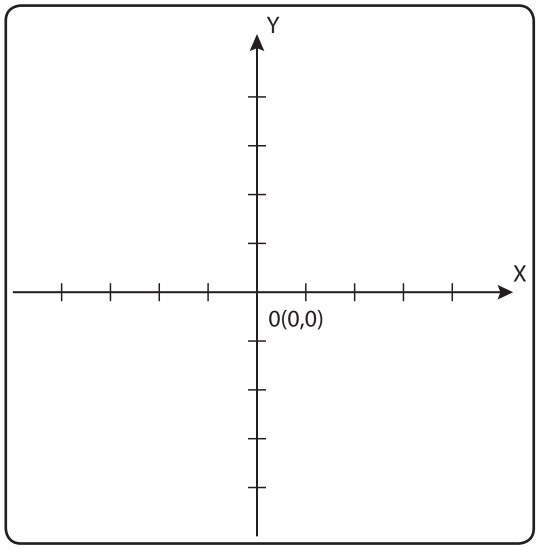


Figura 3.1: Um sistema de referência cartesiano.

A reta horizontal é conhecida como eixo das abcissas X, ou $\overrightarrow{OX}$, e a reta vertical é conhecida como eixo das ordenadas Y ou $\overrightarrow{OY}$.

No capítulo anterior, estudamos os números reais e como eles podem ser colocados numa reta real. Pois bem, no plano cada um dos eixos é uma reta real, em consequência, podem ser alocados os números correspondentes a cada uma. Dessa forma, temos definido o plano cartesiano.

Uma visualização disso junto à alocação dos pontos O, P, Q, R, S é possível no seguinte gráfico:

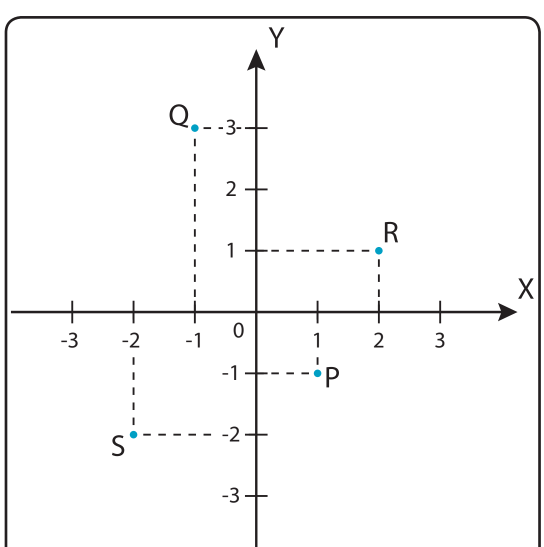


Figura 3.2: O plano cartesiano e alguns pontos dele.

As coordenadas de cada ponto serão respectivamente $O(0,0), P(1,-1), R(2,1), Q(-1,3)$ e $S(-2,-2)$. Desse modo, um ponto qualquer P de coordenadas (x, y) será denotado na forma $P(x, y)$.

3.1.2 Produto cartesiano e relações

Produto cartesiano

Neste caso, os elementos em cada eixo cartesiano não são apenas números, e será mantida a ordem como eles são fornecidos em cada conjunto. Veremos um exemplo de subconjuntos de um produto cartesiano na Figura 3.4.

Sejam A e B dois conjuntos de ***elementos quaisquer*** (números, símbolos etc.) alocados em cada eixo do plano cartesiano, definimos o produto cartesiano $A \times B$ como o conjunto de pares ordenados da forma:

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A,\ y \in B\}.$$

Por exemplo:

a) Se $A = \{*, [], 3\}$ e $B = \{\&, **\}$, então,

$$A \times B = \{(*, \&), (*, **), ([], \&), ([], **), (3, \&), (3, **)\}.$$

b) No caso $A = \{Maria, João\}$ e $B = \{a, o\}$

$$A \times B = \{(Maria, a), (Maria, o), (João, a), (João, o)\}.$$

Nota

Você lembra dos conteúdos do Capítulo 1?

Os exemplos anteriores não são comuns por não usarem números de um ***conjunto numérico***. O exemplo descrito em b) pode estar associado ao problema de identificar as possibilidades do tipo sanguíneo A e O para duas pessoas, João e Maria.

Quando os conjuntos são numéricos, teremos exemplos da forma:

c) $A = \{1, 3\}$, $B = \{-1\}$

$$A \times B = \{(1, -1), (3, -1)\}.$$

d) $C = [-2, 3], D = (4, 8)$

$$C \times D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \le x \le 3,\ 4 < y < 8\}.$$

$A \times B$ e $C \times D$ nos fornecem exemplos de produtos cartesianos de conjuntos com um número de elementos finito e infinito, respectivamente.

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o produto cartesiano de todas as abscissas e ordenadas reais possíveis.

Relação:

Dados dois conjuntos A e B, uma relação é um subconjunto de elementos contidos no produto cartesiano $A \times B$. Ela geralmente é denotada por $\Re$ e será dito que $\Re$ é uma relação em $A \times B$ (ou uma relação de A em B).

Vejamos o seguinte exemplo:

Sejam A e B os conjuntos dados por $A = \{-1, 2, 4\}$ e $B = \{-2, 0\}$. O produto cartesiano, $A \times B$, é o conjunto de elementos dados pelos seis pares ordenados

$$\{(-1,-2),(-1,0),(2,-2),(2,0),(4,-2),(4,0)\}.$$

Por sua vez, $\Re = A \times B$ define uma relação em $A \times B$, como mostramos na Figura 3.3.

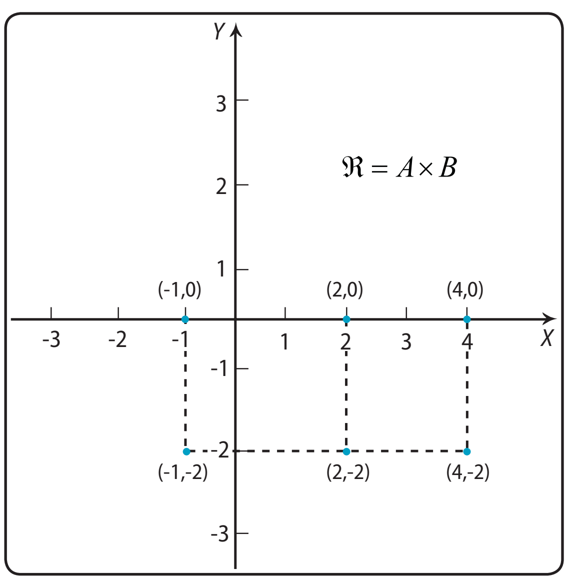


Figura 3.3: O produto cartesiano de conjuntos também é uma relação.

Observações

- Alguns autores optam por definir o produto cartesiano usando conjuntos não vazios.

- Para obtermos relações, podem ser considerados conjuntos (não vazios) A e B de qualquer tipo, mas é comum considerar elementos numéricos nos conjuntos dados.
- Os conjuntos A e B podem ser finitos ou infinitos.

Os seguintes exemplos mostram algumas das observações.

1º exemplo:

São relações:

a) $\Re_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 1; y = 1, 2\} = \{(1,1), (1,2)\}$;

b) $A = [0,4]$, $B = [-2,-1]$
$\Re_2 = \{(x, y) \in A \times B / y = -1, x \text{ é par}\} = \{(2,-1), (4,-1)\}$.

Observação:

Observamos que na parte b) do primeiro exemplo $x = 0$ não é um número par.

Se (x, y) é um elemento de uma relação, ele pode ser denotado da forma $x\Re y$, indicando que x e y estão relacionados.

2º exemplo:

Em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ podemos estabelecer a relação dos elementos $x\Re y$ tal que se x é escolhido de forma única, então y é ímpar.

Se $x \in \mathbb{N}$ e y é ímpar então $1\Re 1$, $1\Re 3$, $1\Re 5, \ldots$ $2\Re 1$, $2\Re 3\ldots$ etc. Como x é escolhido de forma única, teremos o conjunto

$$\Re = \{(1,3), (2,5), (3,7), \ldots\} \quad (1)$$

ou simplesmente

$$\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / y = 2x + 1\}. \quad (2)$$

No exemplo anterior, denotamos uma mesma relação nas formas (1) e (2). A segunda forma é a que será usada com mais frequência. Nesses exemplos, as relações $\Re_1$ e $\Re_2$, $\Re$ podem colocadas nas formas $\Re_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Re_2 : A \to B$ e $\Re : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, respectivamente.

3º exemplo:

Sejam A o conjunto de gametas femininos $A = \{a, b, o\}$ e B o conjunto de gametas masculinos $B = \{a, b, o\}$. O produto cartesiano $A \times B$ e qualquer subconjunto dele também é uma relação cujos elementos são pares ordenados não numéricos. Assim, $\Re_1 = \{(a,a),(b,b),(o,o)\}$ e $\Re_2 = \{(b,b)\}$ são relações em $A \times B$ com um número finito de elementos (três elementos no primeiro caso e apenas um no segundo).

Observemos os gráficos respectivos na Figura 3.4:

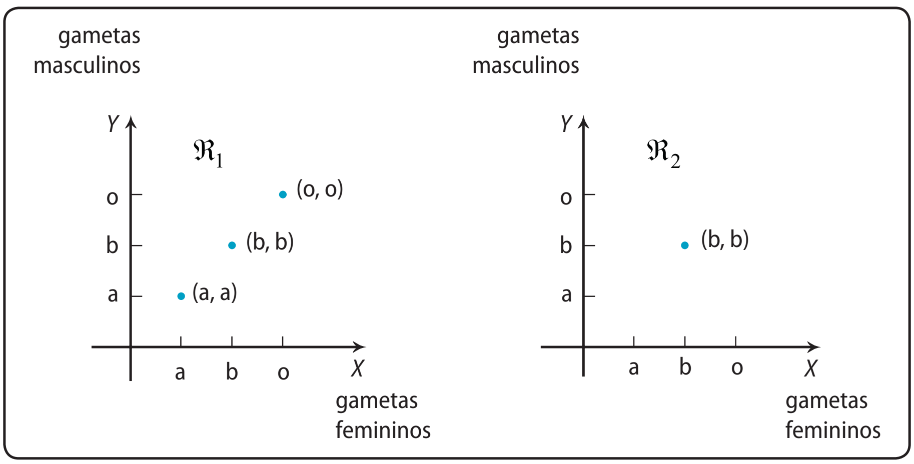


Figura 3.4: Relações com elementos não numéricos.

4º exemplo:

Relação entre a temperatura do corpo e a frequência de pulsação de uma pessoa.

Sejam as variáveis t: temperatura do corpo (em graus centígrados) e f: a frequência de pulsação (em ciclos por minuto), com esses dados, descrevemos os conjuntos A e B usando intervalos:

$$A = \{t \in \mathbb{R} \,/\, 35 \leq t \leq 41\} \qquad B = \{f \in \mathbb{R} \,/\, 50 \leq f \leq 150\}.$$

Como em cada um desses intervalos há infinitos números, então A e B são conjuntos contidos em $\mathbb{R}$ com infinitos elementos. Denotamos isso como sendo $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$ ($\subset$ é o símbolo de inclusão de conjuntos).

Considerando o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, então

$$\Re_1 = A \times B \subset \mathbb{R}^2.$$

Vejamos ao lado o gráfico dessa relação em $\Re_1$ dado pelo retângulo destacado de pontos (incluindo a borda dele).

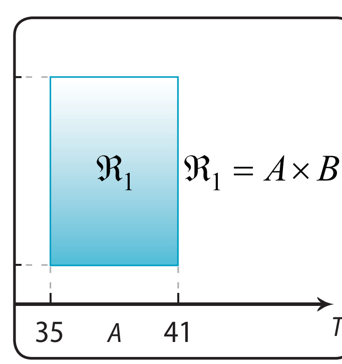


Figura 3.5: Relação $\Re_1$ contendo infinito número de elementos.

Usando os dados do 4º exemplo, definimos a relação $\Re_2$ como sendo o conjunto de pares ordenados indicando **temperatura e frequência normal** de uma pessoa, como mostra a Figura 3.6. Nela visualizamos $\Re_2$ como uma região incluída na região anterior dada por $\Re_1$.

Consideramos condições normais de uma pessoa quando a temperatura oscila entre 35 e 36,5°C e a frequência se encontra entre 50 e 90 ciclos por minuto.

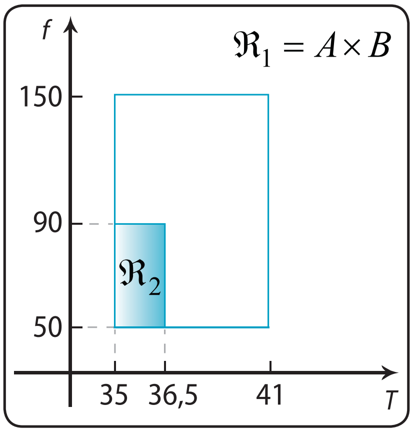


Figura 3.6: Relação $\Re_2$: condições normais de temperatura e frequência.

5º exemplo:

Sejam $A = B = \mathbb{N} \cup \{0\}$. No plano cartesiano, $\Re_2 = A \times B$ fornece apenas os pares ordenados de coordenadas não negativas, isto é, pontos no primeiro quadrante. Essa relação tem também um conjunto infinito de pontos, porém um conjunto discreto.

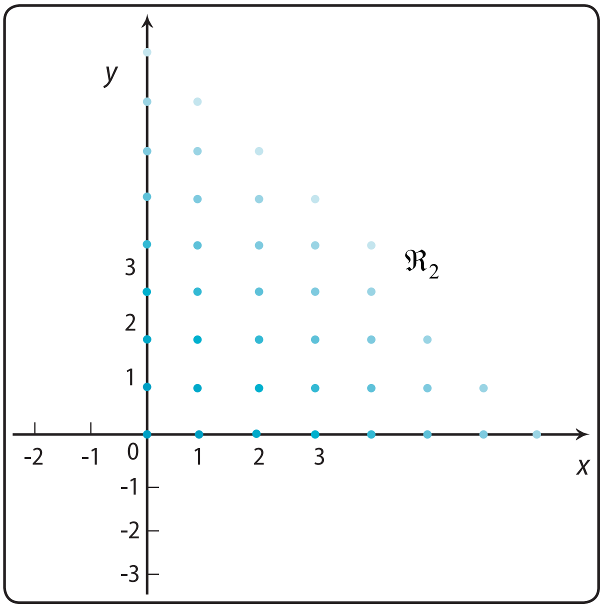


Figura 3.7: Relação $\Re_2$ contendo infinitos pontos de forma discreta.

Observação:

$\Re$ é dita ser uma relação de A em B, ou apenas $\Re : A \to B$. No exemplo 5, $\Re : \mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\}$.

6º exemplo:

Seja $\Re_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 < x < 0, 3 < y < 5\}$ o elemento $(-0,5, 4) \in \Re_1$, isto é $-0,5\Re_1 4$. Já o elemento $(-2, 4)$ não pertence à relação.

Domínio e contradomínio de uma relação

Dada uma relação $\Re$, $x\Re y$ é um elemento de $\Re$ que indica que todos os valores de x estão relacionados com os valores y. Dessa forma, temos definidos os valores x do domínio e os valores y do contradomínio, respectivamente.

Por exemplo:

Na relação $\Re_1$ do 1° exemplo, o domínio é dado pelo conjunto unitário $\{1\}$, e o contradomínio é o conjunto $\{1,2\}$.

No 2° exemplo, o domínio e o contradomínio são iguais aos números naturais.

Na relação $\Re_1$ do 6° exemplo, o intervalo $(-1,0)$ é o domínio, e o intervalo $(3,5)$ é o contradomínio.

3.2 Funções

O conceito de função foi muito usado durante o Ensino Médio. Nesta seção, forneceremos esses conceitos numa linguagem formal e nos serviremos de *softwares* de computador para fixar alguns conteúdos e visualizar diversos gráficos. Mais adiante, poderemos explicar algumas situações práticas importantes.

3.2.1 Definição, domínio e imagem

Função

Definição: Uma função f de A em B é uma relação em $A \times B$, que associa a cada variável x em A um único y em B.

Uma função será denotada da forma:

$$f : A \to B$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

$f(x)$ é uma lei de correspondência, ou lei de formação, que define os valores de y para cada x.

Como uma função é uma relação, A e B são o domínio e o contradomínio. Assim, todo elemento de A deve ter um elemento correspondente em B.

Vejamos:

São funções:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x$
isto é, $y = 2x$ ou $f(x) = 2x$.

b) $g : [-2, 2] \to [0, 4]$
$g(x) = x^2$

Os gráficos dessas funções são, respectivamente:

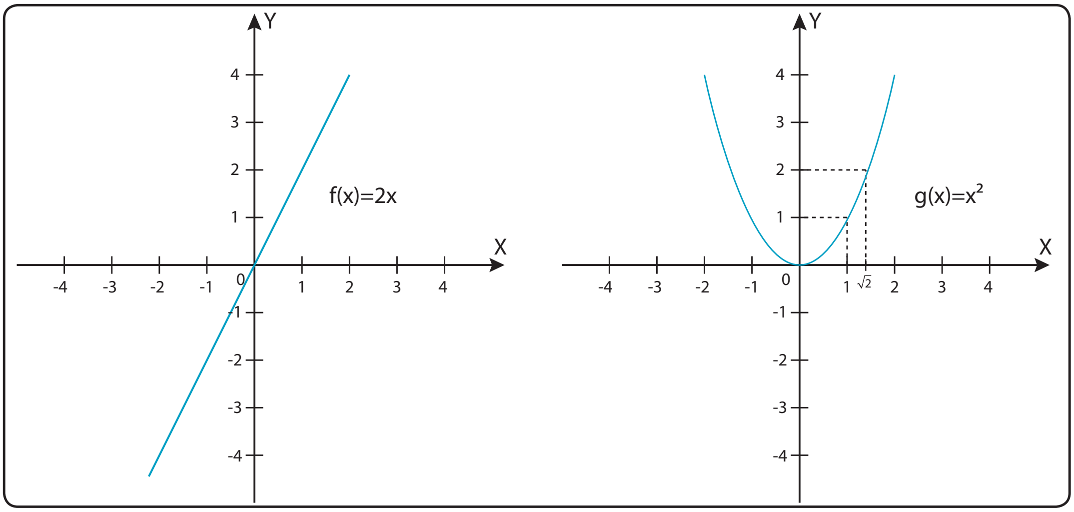


Figura 3.8: Gráficos das funções f e g do exemplo anterior, definidas nos seus respectivos domínios.

Com os gráficos, podemos observar que a diferença entre relação e função está em como cada elemento do domínio associa apenas um elemento do contradomínio.

Vejamos os seguintes exemplos:

Seja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ e a correspondência $y^2 = x$. Nesse caso:

x	y
:	:
0	0
1	± 1
4	± 2
:	:

e o gráfico é dado logo a seguir.

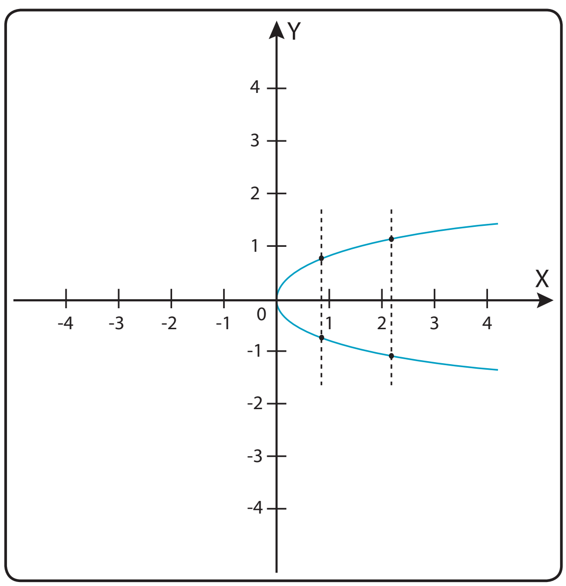


Figura 3.9: Se $y^2 = x$, o gráfico define uma função?

Nesse exemplo, qualquer reta vertical corta a curva em dois pontos. Observe que isso não acontece nos exemplos anteriores em que definimos funções.

Observação:

Uma função é uma relação, mas nem sempre uma relação é uma função. Geometricamente, isso pode ser verificado ao cortarmos o gráfico de uma função por uma linha vertical. Para termos uma função, o corte deve acontecer uma única vez.

Domínio de uma função: D_f

Sejam A e B dois conjuntos de números reais, definimos o domínio de uma função como segue.

Domínio

Dada uma função $f : A \to B$ com lei de formação $y = f(x)$, o domínio da função f, D_f é o subconjunto de números reais de A que permitem satisfazer a lei de formação $y = f(x)$.

Assim, por exemplo:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = \sqrt{x+3}$.

Os valores x que permitem que $y = \sqrt{x+3}$ seja possível são aqueles tais que

$$x + 3 \geq 0, \text{ isto é } x \geq -3.$$

Assim,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -3\} = [-3, \infty).$$

b) Se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ com $f(x) = \sqrt{x+3}$, então, como feito em a)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}^+ \,/\, x \geq -3\} = [0, \infty).$$

Nota:

Se $f : A \to B$, então o D_f está contido ou pode ser igual ao conjunto A. Denotamos isso na forma $D_f \subseteq A$.

Imagem de uma função: Im_f

É o subconjunto de números reais contidos em B que resolvem a expressão $y = f(x)$. Matematicamente, colocamos:

$$Im_f = \{y \in B \,/\, \exists x \in D_f \text{ tal que } y = f(x)\}.$$

Por exemplo:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ com } y = \sqrt{x}.$$

Nesse caso, $D_f = [0, \infty)$. Por quê?

Por propriedade de desigualdades,

$$x \geq 0, \text{ então } \sqrt{x} \geq 0, \text{ como } y = \sqrt{x} \text{ então } y \geq 0$$

assim, os y que resolvem a expressão $y=\sqrt{x}$ são não negativos (positivos ou nulos). Temos então:

$$D_f=\left[0,\infty\right) \text{ e } Im_f=\left[0,\infty\right).$$

Já no caso, $f:\mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R}$ com $y=\sqrt{x+3}$, com $x\in\left[0,\infty\right)$ (ou $x\geq 0$), e usando propriedades das desigualdades:

$$x+3\geq 3$$
$$\sqrt{x+3}\geq\sqrt{3}$$
$$y\geq\sqrt{3}$$

Assim,

$$Im_f=\left[\sqrt{3},\infty\right).$$

Neste caso,

$$D_f=\left[0,\infty\right),\ Im_f=\left[\sqrt{3},\infty\right).$$

Observe o gráfico:

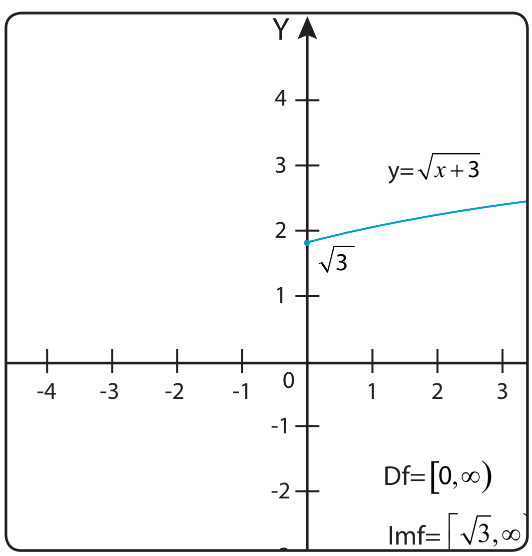


Figura 3.10: Domínio e imagem da função do exemplo anterior.

Observação

Uma função é uma relação dada pelos pares $(x, f(x))$ de forma que para cada x do domínio há um único valor $f(x)$ na imagem da função. Embora haja o mal uso da linguagem matemática, desde a escola nos acostumamos a denotar uma função na forma $y = f(x)$.

Desse modo, y, a ordenada, é uma variável dependente da abscissa x, a variável independente.

Toda vez que temos uma função, temos duas variáveis: uma independente e outra dependente, sem nos interessarmos com qual letra denotar as mesmas.

Vejamos este exemplo:

No caso das funções (t,u) e (x,s) com $u = f(t)$ e $s = g(x)$, as regras de correspondência estão definidas respectivamente por $f(t) = 5t^3 - 2$ e $g(x) = 2\cos(x)$. Aqui, u e s são as variáveis dependentes e t e x as variáveis independentes, respectivamente.

Gráfico de uma função

O gráfico de uma função G_f está consituído pelo conjunto de pontos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ da seguinte forma:

$$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = f(x),\ x \in D_f\}$$

que é equivalente a

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in D_f\}$$

Por exemplo:

Na Figura 3.10, temos o gráfico da função com regra de correspondência $y = \sqrt{x+3},\ x \geq 0\ \left(D_f = [0,\infty)\right)$.

Já a Figura 3.11 exibe os gráficos de duas funções, que serão estudadas na próxima seção.

3.2.2 Tipos de funções

As funções mais conhecidas são as seguintes:

Função constante

Seja um valor fixo, c. A função constante é definida por

$$\begin{gathered} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = c \end{gathered}$$

Assim, $f(x) = 2$ é a função constante igual a $2\ (c = 2)$.

Função linear (ou função de 1º grau)

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}.$$

$$f(x)=ax+b,\ a\neq 0.$$

$D_f = Im_f = \mathbb{R}$

Escolhendo $a=-1$, $b=3$, temos a função $f(x)=-x+b$ como exemplo.

Função módulo

$$f(x)=|x|.$$

Como o módulo está definido para qualquer número real, então, $D_f=\mathbb{R}$. Já os elementos da imagem, $y=|x|$ são sempre não negativos (definição do módulo de um número real), então, $Im_f=[0,\infty)$.

Função polinomial

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x^1+a_n,\ a_0\neq 0.$$

É uma função polinomial de grau n.

Por exemplo, $f(x)=x^5-3x+1$ é uma função polinomial de grau 5 e $g(x)=x^3+x^2-x+1$ é uma função polinomial de grau 3.

Função trigonométrica

São as funções **seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante** e suas variantes.

Acesse os sites de domínio público desses conteúdos. Por exemplo, E-cálculo, da USP. Também usaremos, na próxima seção, alguns softwares para graficar os diversos tipos de função.

Por exemplo:

$$f(x)=\operatorname{sen}x \text{ ou } h(x)=\cos\frac{x}{2}.$$

Função sobrejetora

Uma função $f:A\to B$ é dita sobrejetora se, e somente se, para todo y pertencente a B existe um elemento x pertencente a A tal que $f(x)=y$.

O escrito acima, representado simbolicamente, pode ser colocado na seguinte forma:

$$f:A\to B \text{ é sobrejetora} \Leftrightarrow \forall y\in B,\ \exists x\in A\,/\,f(x)=y.$$

Por exemplo:

- $A = B = \mathbb{R}$, a função linear $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 2x$ é sobrejetora, pois para todo número real $y\ (\forall y \in \mathbb{R})$ o valor $\frac{y}{2}$ é um ***número real***, e como $\frac{y}{2} = \left(\frac{2x}{2}\right)$, isto é, $x = \frac{y}{2}$ é real (ou seja, $\exists x \in \mathbb{R} / 2x = 2\left(\frac{y}{2}\right) = y$).

Você lembra as propriedades dos números reais do primeiro capítulo?

- $A = B = \mathbb{R}$, a função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2 + 1$ não é sobrejetora, pois se $y = -5$, não existe valor x real tal que $f(x) = x^2 + 1 = -5$, já que ao resolvermos a equação teremos $x^2 = -6$, e essa equação não tem solução nos números reais.

- $A = [-5, 5]$, $B = [1, 26]$, a função $f: A \to [1, 26]$ com $f(x) = x^2 + 1$ também é sobrejetora, pois sendo que $1 \le y \le 26$, ao substituir por $y = x^2 + 1$ resolvemos $1 \le x^2 + 1 \le 26$, $x \in [-5, 5]$, que são valores reais do domínio da função.

O fato de uma função ser sobrejetora significa que qualquer elemento do contradomínio B se relaciona com, pelo menos, um elemento de A.

Uma propriedade que se deriva da definição de função sobrejetora é o fato da imagem de a função coincidir com B, isto é, $\text{Im}_f = B$.

Função injetora

Uma função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita injetora se, e somente se, para quaisquer x_1 e x_2 de A, se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

Por exemplo:

- A função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = -x + 1$ é injetora, pois se $f(x_1) = f(x_2): -x_1 + 1 = -x_2 + 1$, isto é, $x_1 = x_2$ para quaisquer x_1 e x_2 de $\mathbb{R}$.

- No caso da função $f:[-5, 5] \to [1, 26]$ com $f(x) = x^2 + 1$. Se $f(x_1) = f(x_2): -x_1^2 + 1 = -x_2^2 + 1$. Ou seja, $x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$. Ao obtermos duas respostas, não estamos satisfazendo a definição. Dessa forma, a função dada não é injetora.

Se a interseção do gráfico da função com qualquer reta horizontal é apenas um ponto, podemos afirmar que a função é injetora.

Mostramos essa interpretação geométrica nos seguintes gráficos.

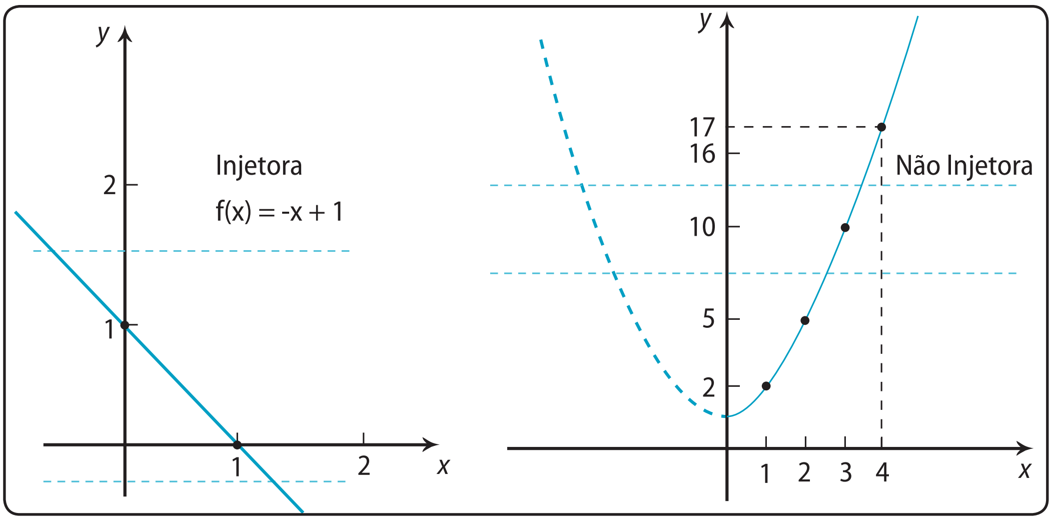


Figura 3.11: Funções injetoras interceptam uma horizontal em apenas um ponto.

Para justificar essa interpretação geométrica, vejamos o seguinte enunciado:

Para quaisquer x_1 e x_2 de A, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

No exemplo anterior, a função $f(x) = x^2 + 1$ com os valores $x_1 = 3$ e $x_2 = -3$ $(x_1 \neq x_2)$, $f(3) = 10$ e $f(-3) = 10$. Como $f(3) = f(-3)$, então a função f não satisfaz o enunciado. Isso é suficiente para afirmar que $f(x) = x^2 + 1$ não é injetora. Observamos isso também nos valores $x = \pm 1, \pm \frac{5}{2}, \pm \pi, \pm 4$, entre muitos outros.

Função bijetora

Uma função $f : A \to B$ é dita bijetora se, e somente se, ela é injetora e sobrejetora.

Vejamos o exemplo:

- A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = -x + 1$ é bijetora, pois, como discutido acima, ela é injetora e, como $\mathrm{Im}_f = \mathbb{R}$, então é sobrejetora.
- A função $f : [-5, 5] \to [1, 26]$ com $f(x) = x^2 + 1$ não é bijetora, pois ela não é injetora.

Mais adiante, usaremos o conceito de função bijetora ao estudarmos a inversa de uma função.

3.3 Aplicações das funções

Como comentamos no início deste capítulo, há muitos problemas do cotidiano (e das diversas áreas do conhecimento) que podem ser resolvidos usando funções, tais como o Índice de Massa Corporal (IMC), variações na pressão sanguínea, funções com elementos de uma figura plana e espacial, o crescimento da população brasileira, o crescimento da população mundial etc. Veja detalhes disso no ambiente virtual da disciplina.

3.4 Operações com funções

Dadas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com domínio D_f e D_g respectivamente, definimos:

Soma e subtração de funções: $f \pm g$

É a função $h = f \pm g$, tais que $h(x) = f(x) \pm g(x)$, $\forall x \in D_f \cap D_g$, isto é, $D_h = D_f \cap D_g$.

Vejamos:

Se $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = \left[0,\infty\right)$ e $g(x) = x^3$, $D_g = \mathbb{R}$, então, $h = f + g$ tem domínio $D_h = \left[0,\infty\right) \cap \mathbb{R} = \left[0,\infty\right)$. A regra de correspondência para h é dada por:

$$h(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + x^3,\ \forall x \in D_h = \left[0,\infty\right).$$

Produto de funções: $f.g$

É a função $h = f.g$, tais que $h(x) = f(x).g(x)$, $\forall x \in D_f \cap D_g$, isto é, $D_h = D_f \cap D_g$.

Vejamos outro exemplo:

Se $f(x) = x$ e $g(x) = x+1$, então, $D_f = D_g = \mathbb{R}$ e $D_h = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$ com $h(x) = f(x).g(x) = (x).(x+1)$, assim,

$$h(x) = x^2 + x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quociente de funções: $\dfrac{f}{g}$

É a função $h=\dfrac{f}{g}$, tais que $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sempre que $g(x)\neq 0$. O domínio $D_h = D_f \cap D_g \setminus \{x\in\mathbb{R} \,/\, g(x)=0\}$.

A barra invertida serve para retirar parte de um conjunto. Exemplo $A\setminus B$ indica tirar B de A.

Outro exemplo:

Se $f(x)=x^2$ e $g(x)=x$, $D_f = D_g = \mathbb{R}$ e $D_h = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$. Os valores em que a função g se anula vêm dados pelo conjunto

$$\{x\in\mathbb{R} \,/\, g(x)=0\} = \{x\in\mathbb{R} \,/\, x=0\} = \{0\}.$$

Assim, $D_h = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\left(\text{ou}\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,\infty\right)\right)$, e

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2}{x}=x$$

$$h(x)=x,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Na seção anterior, vimos que uma função quadrática pode se expressar na forma $y(x)=ax^2+bx+c$ com $a\neq 0$. Pois bem, podemos considerar essa função como sendo a soma das funções: $y(x)=ax^2$ com a função afim $y(x)=bx+c$. Por sua vez, a função $y(x)=ax^2$ é o produto da função constante $y(x)=a$ com a função quadrática $y(x)=x^2$ (ou a função linear $y(x)=ax, a\neq c$ com outra função linear $y(x)=x$).

Isso quer dizer que uma função polinomial, exemplo de operações com funções, é obtida ao se multiplicar e somar funções já conhecidas.

A seguinte função é também obtida ao operar com funções:

Função racional

É o quociente de duas funções polinomiais de grau m e n, cuja função no denominador nunca se anula. Essa função está dada na forma

$$Q(x)=\frac{P_n(x)}{P_m(x)},\ P_m(x)\neq 0.$$

São exemplos de funções racionais as seguintes:

$$Q_1(x)=\frac{x^3-2}{x^2+x+5} \text{ e } Q_2(x)=\frac{3x^4-4x}{x+1}.$$

Obter o gráfico de funções polinomiais e racionais não é tarefa fácil de se fazer, porém eles podem ser obtidos facilmente usando ***softwares*** que podem nos auxiliar nessa tarefa.

O uso de softwares será um tópico adicional deste capítulo e será colocado na seção final.

Composição de funções: $f \circ g$

Seja f e g duas funções com domínio D_f e D_g, respectivamente. Definimos a composição dessas funções $f \circ g$ (nessa ordem) como a função com a seguinte regra de correspondência:

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Dessa forma, $D_{f\circ g} = \left\{x \in D_g \ / \ g(x) \in D_f\right\}$.

Isso pode ser esquematizado da seguinte forma:

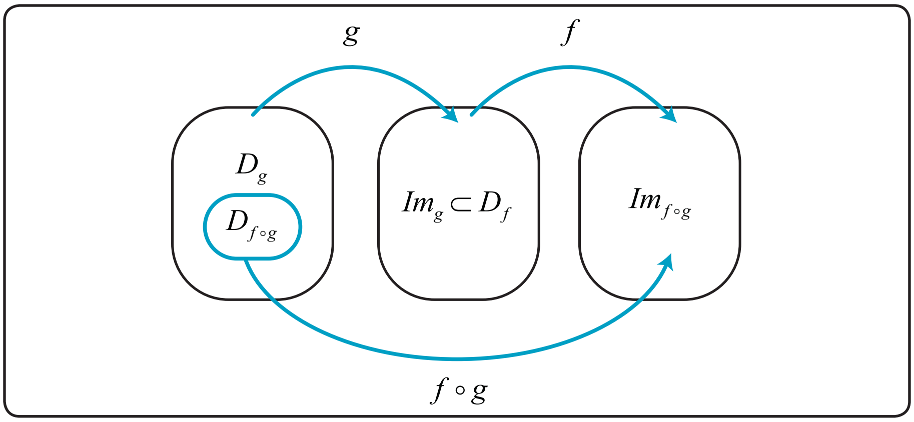


Figura 3.12: Composição de funções.

Pelo gráfico, compor f com g só será possível se houver elementos da imagem de g no domínio de f.

Por exemplo:

Se $f(x) = x+1$, $g(x) = \sqrt{x}$, para obtermos $f \circ g$ precisamos do domínio de g, D_g. Como $D_g = \mathrm{Im}_g = \left[0,\infty\right)$ e $D_f = \mathrm{Im}_f = \mathbb{R}$, então, $D_{f\circ g} = \left\{x \in \left[0,\infty\right) / \sqrt{x} \in \mathbb{R}\right\} = \left[0,\infty\right)$.

(Note que a raiz de um número posititivo é sempre um número real.)

A regra de correspondência da composição é:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$$

$$f \circ g(x) = \sqrt{x} + 1$$

Vejamos outro exemplo:

Já no caso de obtermos $g \circ f$ (usando as funções do exemplo anterior) com domínio

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \ / \ f(x) \in D_g\} .$$

Para obter $D_{g \circ f}$, encontramos os $x \in D_f$ tal que $f(x) \in D_g$:

$$D_f = \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = x+1,\ D_g \left[0, \infty\right).$$

Se $x \in \mathbb{R}$, então, $f(x) = x+1 \in \mathbb{R}$, então, para termos elementos da imagem de f no domínio de g, precisaremos restringir:

$$D_{g \circ f} = \left\{x \in D_f \ / \ f(x) \in D_g\right\} \text{ ou}$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ e } x+1 \geq 0 ,$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ e } x \geq -1 ,$$

$$\text{então, } x \geq -1 .$$

Assim,

$$D_{g \circ f} = \left[-1, \infty\right).$$

Compondo:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+1) = \sqrt{x+1} .$$

Nota:

De fato, a função $h(x) = g \circ f = \sqrt{x+1}$ tem como domínio $\left[-1, \infty\right)$.

Agora sabemos que se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são duas funções com domínios D_f e D_g, a função composta $h = g \circ f$ estará definida de A em C, isto é, $h : A \to C$. A lei de correspondência de h é dada por $h(x) = g(f(x))$.

Vejamos o seguinte exemplo:

Se $f(x) = x+1$ e $g(x) = x^2 + x + 1$,

$h(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 + (x+1) + 1 = x^2 + 3x + 3.$

Como $D_f = D_g = \mathbb{R},\ D_{g \circ f} = \mathbb{R}.$

Podemos encontrar também

$h_1(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1) + 1 = x^2 + x + 2$

Nesse caso $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$.

É importante perceber que, se mudamos a ordem ao compor as funções, não teremos o mesmo resultado.

Observações

- A composta $g \circ f$ sempre está definida se a imagem de f for igual ao domínio de g. Esses são os casos mais simples de compor.
- Se o anterior não acontecer, então, para compor $g \circ f$ será necessário impor restrições desde que a imagem de f tenha elementos em comum com o domínio de g, caso contrário, a composição não existe.
- Em geral, $g \circ f \neq f \circ g$, como vimos no exemplo.

Inversa de uma função

Se f é uma função de A em B, então a função g de B em A, denominada função inversa, existe se $f \circ g = g \circ f = I$.

Nota: I é a função identidade $I(x) = x$.

Por exemplo:

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que $f(x) = 2x$ e $g(x) = \frac{1}{2}x$. A função g é a inversa de f, pois:

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = 2\left(\frac{1}{2}x\right) = x,$$

$$g(f(x)) = g(2x) = \frac{1}{2}(2x) = x.$$

Assim, $f \circ g = g \circ f = I$.

Nota: A função inversa de f será denotada por f^{-1}.

Propriedade

A inversa de $f : A \to B$ existe se, e somente se, f é bijetora.

Vejamos o exemplo:

Vamos responder por quê?

Seja $f(x) = 2x - 1$, f é uma ***função bijetora***.

Encontremos a função inversa:

$$f(g(x)) = 2g(x) - 1 = I(x) = x,$$

então,

$$g(x) = \frac{x+1}{2}.$$

Também,

$$g(f(x)) = g(2x-1) = \left(\frac{(2x-1)+1}{2}\right) = x = I(x).$$

Assim,

$$f^{-1}(x) = \frac{(x+1)}{2}.$$

Observações

3. Sejam D_f e D_g os domínios das funções f e g, ao colocarmos $f \circ g = I$ entendemos que $f \circ g(x) = f(g(x)) = x$, $\forall x \in D_g$, similarmente $g \circ f(x) = g(f(x)) = x$, $\forall x \in D_f$.
4. Uma forma prática de encontrarmos a função inversa de $y = f(x)$ (após verificarmos que é bijetora, claro!) é resolvermos a equação dada em x, obtendo $x = g(y)$ e trocarmos as variáveis y por x. No exemplo anterior, tivemos $y = 2x - 1$, que é bijetora, resolvendo para $x : x = \frac{y+1}{2}$. Ao trocarmos as variáveis, $y = \frac{x+1}{2}$ nos fornece a lei de correspondência para f^{-1}, $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$.

3.5 Gráfico de funções usando os softwares Graphmatica e Winplot

Neste ponto, além da prática com lápis e papel, é importante obter os gráficos das funções resultantes após suas operações. Adicionalmente, serão elaborados, entre outras funções, os gráficos das funções exponencial e logarítmica. Para facilitar a obtenção de tais gráficos (ou de qualquer função), será necessária a familiarização com ferramentas computacionais com aplicativos, como o ***Graphmatica*** e ***Winplot***.

<www.prof2000.pt/users/folhalcino/formar/grafmat/2000/gm5.htm> *e* <www.diadematematica.com/winplot/WINPLOT.html>, *respectivamente.*

Eles são de domínio público, ou seja, são gratuitos. Podem ser acessados através da página <http://mtm.ufsc.br/ensinomedio>.

Apenas a curiosidade e a vontade de se engajar com esta disciplina fará com que a novidade (e pode ser o caso que não seja mais) chegue a ser uma atividade no seu dia a dia escolar.

Comandos dos aplicativos: alguns detalhes

Ambos os aplicativos possuem um ícone de ajuda (*Help*) que você poderá usar para resolver a maior parte de suas dúvidas.

Graphmatica

Por estar escrito em inglês, os comandos das funções trigonométricas são apresentados como $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ etc., que indicam, respectivamente, $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$. A função exponencial é chamada de $\exp(x)$. As funções logarítmicas aparecem como $\ln(x)$ ou $\log(x)$ para diferenciar as bases $e(\approx 2{,}71...)$ ou 10, respectivamente. A potência de números ou variáveis 3^2, 2^x é indicada por $3\,^\wedge 2$, $2\,^\wedge x$. Os seguintes exemplos mostram como usar esse aplicativo.

1º exemplo

A seguir, estudaremos com algum detalhe como trabalhar com o Graphmatica, e, assim, facilitaremos a compreensão de alguns comandos definidos em inglês.

Para construir o gráfico da função polinomial $y = x^3 - 2x + 3$, precisamos colocar na janela de comandos do Graphmatica:

$$y = x\,^\wedge 3 - 2x + 3.$$

Clicando em Graph, a curva solução aparecerá na janela gráfica, e clicando no ícone *Labels* $\rightarrow$ *Annotate* poderemos anotar a mensagem “Função Polinomial: $y = x\,^\wedge 3 - 2x + 3$”. ($x\,^\wedge 3$ indicará a potência x^3!). Já o ícone Clear apagará a(s) curva(s) da tela. Observemos o resultado na Figura 3.13:

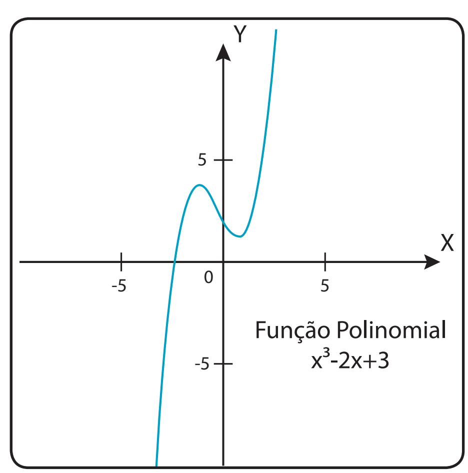


Figura 3.13: Gráfico de uma função usando Graphmatica.

2º exemplo

Este exemplo mostra a construção de uma função racional e a composição de funções. O gráfico da função racional $y = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 1}{2 - x}$, ao colocarmos na janela de comandos, será dado pela seguinte expressão:

$$y = (x \wedge 4 - 3x \wedge 2 + 1) * [(1/(2 - x)].$$

Já o gráfico da composição das funções $y = x^4 - 3x^2 + 1$ com $y = x + 5$ é obtido ao colocarmos a seguinte expressão na janela de comandos:

$$y = (x + 5) \wedge 4 - 3(x + 5) \wedge 2 + 1.$$

Vejamos os gráficos obtidos na Figura 3.14. Nela, cada curva aparece em uma tonalidade diferente:

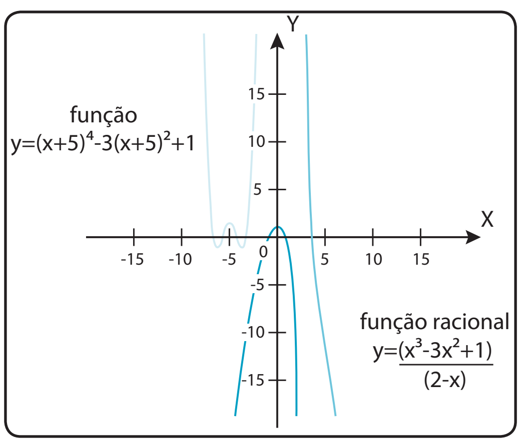


Figura 3.14: Graphmatica e suas propriedades.

Winplot

Ao executar esse aplicativo, aparece uma janela com dois ícones: help e janela. O ícone *Help* contém todas as informações do uso do aplicativo. Clicando no ícone *Janela*, o sistema indicará, entre outras coisas, se queremos construir gráficos em duas (2-dim) ou três dimensões (3-dim). Clicando em *2-dim*, automaticamente abrirá uma janela com extensão *.wp2*, que pode ser salva colocando um nome, por exemplo, *meugrafico.wp2*. Nessa última janela, teremos um conjunto de ícones. Escolhemos *Equação Explícita* e aparecerá uma janela *Inventário* para *meugrafico.wp2*, aí estaremos em condições de editar qualquer função.

Esse aplicativo, por estar em português, é mais amigável. Por exemplo, a função seno pode ser chamada com ambos os comandos, $\sin(x)$

ou sen(x). As funções exponencial e logarítmica serão editadas com exp(x) e ln(x), respectivamente. A potência de números ou variáveis 3^x, x^2 pode ser colocada como $3 \wedge 2$, $x \wedge 2$ (ou $x * x$). Veremos a saída gráfica (Figura 3.15) e algumas propriedades no exemplo a seguir.

3º exemplo

A Figura seguinte mostra o gráfico da função exponencial e logarítmica. Neste caso, para colocar o nome da função ao lado de cada gráfico, clicamos apenas onde queremos a mensagem e arrastamos o cursor até o lugar desejado. Fazer isso com o Graphmatica não é fácil assim.

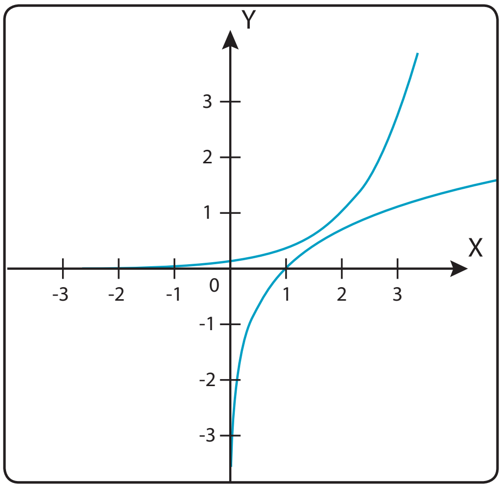


Figura 3.15: Gráfico das operações com a função exponencial e logarítmica.

Nota:

Usar esses *softwares* pode nos auxiliar para encontrar intervalos de crescimento e decrescimento de uma função, assuntos que serão estudados na próxima seção. É possível, também, usar o Excel e outros *softwares* comerciais que você conheça. Nas próximas seções veremos alguns exemplos.

Entenda que, por estar cursando a distância, muito do seu aprendizado dependerá do envolvimento e do tempo que dedicar a esta disciplina. Dado que o uso do computador no ensino (em todos seus níveis) é uma realidade que não podemos ignorar e dado que os diversos tópicos desta e de outras disciplinas estão sendo realizados na frente de um computador, você não deverá estranhar o uso das ferramentas computacionais, pois entenderá que terá elementos de auxílio para seu aprendizado e para o ensino na sua profissão.

3.6 Taxa de variação de uma função

A seguir, forneceremos novos conceitos para funções: as funções crescentes e decrescentes. Esses conceitos servirão de ponto de partida para estudarmos um outro conceito: a taxa de variação de uma função, muito usada em diversas situações práticas.

Funções crescentes e decrescentes

Definição: Uma função $f: A \to B$ definida por $y = f(x)$ é dita crescente no conjunto $A_1 \subset A$, se, para valores x_1, x_2, pertencentes a A_1 com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

Isto é, f é crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in A_1 \subset A$.

Por exemplo:

- A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x + 2$ é crescente em $A_1 = \mathbb{R}$, pois para $x_1 < x_2$ temos $x_1 + 2 < x_2 + 2$, como $f(x_1) = x_1 + 2$ e $f(x_2) = x_2 + 2$, temos, então, $f(x_1) < f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Em particular, essa função será crescente em qualquer subconjunto dos números reais.

- A função $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ com $f(x) = x^2$ e $A_1 = [1, 4]$. Sejam $x_1, x_2 \in A_1 = [1, 4]: 1 \leq x_1 \leq 4$ e $1 \leq x_2 \leq 4$. Assim, x_1, x_2 são positivos (e $1 \leq x_1^2 \leq 16$ e $1 \leq x_2^2 \leq 16$). Como, $x_1 < x_2$ ao elevarmos ao quadrado teremos $x_1^2 < x_2^2$, isto é, $f(x_1) < f(x_2)$. Assim, a função dada é crescente.

- Usemos a mesma função $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ com $f(x) = x^2$ e consideremos $A_1 = [-1, 0]$. Sejam

  $$x_1,\ x_2 \in A_1 = [-1, 0]: -1 \leq x_1 \leq 0 \text{ e } -1 \leq x_2 \leq 0.$$

  Desse modo, x_1, x_2 são negativos. Mudando o sinal em ambas as inequações $0 \leq -x_1 \leq 1$ e $0 \leq -x_2 \leq 1$ (e $0 \leq x_1^2 \leq 1$ e $0 \leq x_2^2 \leq 1$). Considerando $x_1 < x_2$, temos $-x_1 > -x_2$. Como $-x_1$ e $-x_2$ são positivos, é possível elevarmos ao quadrado: $x_1^2 > x_2^2$, isto é, $f(x_1) > f(x_2)$. Dessa maneira, a função dada não é crescente!

Nota:

Lembre-se que elevar ao quadrado em ambos os lados de uma desigualdade, cujos valores são negativos (ou negativos e positivos), pode conduzir a erros. No caso de ambos os lados serem negativos, altera-se o sentido inicial da desigualdade, pois ao multiplicar por (-1), todos os valores no intervalo (iguais a $-x$) se transformam em positivos. O que foi feito nesse último exercício foi justificar o ***procedimento*** com detalhes.

E não precisará ser sempre feito se você teve boa prática na resolução de desigualdades dada no capítulo anterior.

Caro(a) leitor(a), observe: Para verificar o crescimento de uma função, usamos muito a resolução de desigualdades e suas propriedades.

Definição: Uma função $f: A \to B$ definida por $y = f(x)$ é dita decrescente no conjunto $A_1 \subset A$ se, para valores $x_1, x_2,$ pertencentes a A_1 com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

Isto é, f é decrescente se

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \ \ \forall x_1, x_2 \in A_1 \subset A.$$

Por exemplo:

A função linear $f(x) = -x + 2$ é descrescente, pois para qualquer x_1, x_2, $f(x_1) = -x_1 + 2$ e $f(x_2) = -x_2 + 2$. Se $x_1 < x_2$, então,

$$-x_1 > -x_2$$

$$-x_1 + 2 > -x_2 + 2$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Vejamos outro exemplo:

Usando a mesma função do penúltimo exemplo, $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ com $f(x) = x^2$ com $A_1 = [-1, 0]$.

Sejam $x_1, x_2 \in A_1 = [-1, 0] : -1 \le x_1 \le 0$ e $-1 \le x_2 \le 0$.

Assim, x_1, x_2 são negativos. Mudando o sinal em ambas as inequações $0 \le -x_1 \le 1$ e $0 \le -x_2 \le 1$ (e $0 \le x_1^2 \le 1$ e $0 \le x_2^2 \le 1$).

Justificamos anteriormente que se $x_1 < x_2$, então, $-x_1 > -x_2$, agora é possível elevarmos ao quadrado, $x_1^2 > x_2^2$. Ou seja, o fato $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$. Assim, a função dada satisfaz a definição de função decrescente.

Ao considerarmos $A_1 = [1, 4]$ (como mostramos anteriormente), teremos que $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2) \ \forall x_1, x_2 \in [1, 4]$.

Nesse caso, não satisfazendo o enunciado da definição, podemos afirmar que a função não é decrescente em $[1, 4]$.

Nota:

Uma função não pode ser crescente e decrescente no mesmo intervalo dado, ela pode ter ambos os comportamentos em subconjuntos diferentes do seu domínio. Como vimos no exemplo anterior, o caso da função $f(x) = x^2$ foi crescente em $[1, 4]$ e decrescente em $[-1, 0]$.

Vejamos este exemplo:

Analisemos o crescimento da função $f(x) = -x^2 + 1$ nos intervalos $[-3, -1]$ e $[0, 1]$.

Para quaisquer x_1, x_2, temos que

$$f(x_1) = -x_1^2 + 1 \text{ e } f(x_1) = -x_2^2 + 1.$$

Sejam $x_1, x_2 \in [-3, -1]$, então $-3 \leq x_1 \leq -1$ e $-3 \leq x_2 \leq -1$, daí que $1 \leq -x_1 \leq 3$ e $1 \leq -x_2 \leq 3$. Assim, $-x_1$ e $-x_2$ são positivos.

Se $x_1 < x_2$, $-x_1 > -x_2$, então $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$ e $-x_1^2 < -x_2^2$. Somando um em ambos os lados: $-x_1^2 + 1 < -x_2^2 + 1$, isto é, $f(x_1) < f(x_2)$. Concluímos que a função é crescente em $[-3, -1]$.

Mas se $x_1, x_2 \in [0, 1]$, com $x_1 < x_2$, teremos $x_1^2 < x_2^2$. Assim, $-x_1^2 + 1 > -x_2^2 + 1$, isto é, $f(x_1) > f(x_2)$. Concluímos que a função é decrescente em $[0, 1]$. Observemos o gráfico dessa Função na figura 3.16.

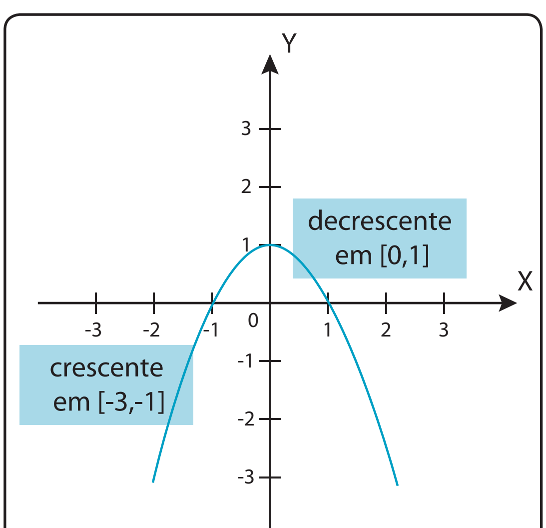


Figura 3.16: Crescimento e decrescimento da função $f(x) = -x^2 + 1$.

Deixamos como exercício usar um *software* para conferir o resultado anterior.

Propriedade 1: Crescimento e decrescimento de funções.

Seja $f : A \to B$ uma função dada por $y = f(x)$.

- Diz-se que f é crescente em $A_1 \subset A$ se $x_1 \neq x_2$ implica $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0,\ x_1, x_2 \in A_1$.
- Diz-se que f é decrescente em $A_1 \subset A$ se $x_1 \neq x_2$ implica $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0,\ x_1, x_2 \in A_1$.

  De fato, no caso da função $f(x) = -x^2 + 1$ no intervalo $[-3, -1]$:

  Se $x_1, x_2 \in [-3, -1]$ com $x_1 \neq x_2$, temos

  $f(x_1) = -x_1^2 + 1$, $f(x_2) = -x_2^2 + 1$ e $f(x_2) - f(x_1) = -x_2^2 + x_1^2$,

  assim,
  $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} = -(x_2 + x_1).$$
- Como x_1, x_2 são negativos em $[-3, -1]$, a soma $x_1 + x_2$ é negativa, e o valor $-(x_1 + x_2)$ será um valor positivo, isto é, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. Concluímos que a função é crescente, conferindo com o resultado anterior.

Propriedade 2

Funções crescentes (ou decrescentes) em **todo** o seu domínio possuem inversa. O fato de a função estar sempre crescendo (ou decrescendo) garante a bijetividade: ela é injetora, pois podemos intersectá-la em apenas um ponto com uma reta horizontal ao longo do todo o seu domínio, e é sobrejetora se o seu contradomínio coincidir com a imagem.

Exemplos

Você pode dizer qual é?

- $f(x) = -x + 1$ é decrescente em $\mathbb{R}$, então ***possui inversa***.
- $g(x) = -x^2 + 1$ não é crescente (ou decrescente) em $\mathbb{R}$. Essa função não tem inversa!

Taxa de variação de uma função

Nas diversas áreas da ciência há aplicações que levam em consideração a razão de duas quantidades. Por exemplo, se nos interessa o crescimento de uma dada população (das bactérias numa cultura, dos insetos de uma plantação, das plantas de um cultivo, do número de habitantes de uma região etc.), poderemos obter essa medida conhecendo o crescimento médio ou o crescimento instantâneo dessa população.

Na física, o conceito de velocidade média de um corpo é muito conhecido e é dado pelo quociente entre o incremento do deslocamento e o incremento no tempo, isto é,

$$velocidade\ média = \frac{incremento\ do\ deslocamento}{incremento\ no\ tempo} =$$

$$= \frac{deslocamento\ \ final - deslocamento\ inicial}{tempo\ \ final - tempo\ inicial},$$

assim, encontraremos a velocidade média usando a razão do deslocamento e o tempo.

O conceito de taxa de variação ou taxa de variação média, dentro do contexto aqui apresentado, será útil para medir as variações acontecendo num dado médio, levando em consideração as suas propriedades. Para representar matematicamente essa medida, faremos algumas considerações.

Dada uma função $y = f(x)$ e (x_0, y_0) um ponto do gráfico da função com valores fixos x_0, y_0 (onde $y_0 = f(x_0)$). Se (x, y) é um ponto qualquer, denominaremos de incremento em x e incremento em y aos valores dados por Δx e Δy (leia-se "delta de x" e "delta de y", respectivamente):

$$\Delta x = x - x_0,$$
$$\Delta y = y - y_0$$

Esses valores podem ser positivos, negativos ou nulos.

Definição:

Considerando incremento Δx e Δy não nulo, definimos a taxa de variação de uma função $y = f(x)$, como o quociente dado por $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Como $y = f(x)$, esse quociente pode ser escrito na forma:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Vejamos:

A taxa de variação de uma função linear.

Seja a função linear $y = ax + b$ e o ponto (x_0, y_0). Sabendo que $y_0 = ax_0 + b$, a taxa de variação será dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a.$$

Isto é, seja qual for o valor x_0, a taxa de variação de uma função linear é uma constante dada pelo valor da inclinação da reta definida por ela (ou coeficiente angular).

Outro exemplo:

Encontremos a taxa de variação da função $f(x) = x^2 + 3x + 3$ entre os valores $x = -2$ e $x = -3$.

Calculando $f(-2)$ e $f(-3)$: $f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) + 3 = 1$ e $f(-3) = (-3)^2 + 3(-3) + 3 = 3$.

Assim, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(-2) - f(-3)}{-2 - (-3)} = 1 - 3 = -2$.

Nesse caso, a taxa de variação é negativa, isto é, a função é decrescente no intervalo $[-3, -2]$. Verifique!

Nos seguintes exemplos de aplicação, estudaremos o quão útil é para os biocientistas o conceito da taxa de variação.

Exemplos de aplicação

Num estudo da redução do 2,6-diclorofenolindofenol pela luz, McNauton (1967) concluiu que a reação fotoquímica em *Typha latifolia* é mais eficiente quanto maior for a altitude na qual cresçam espécies desta planta. Mais precisamente, McNauton estabeleceu que a tão conhecida atividade de Hill é quase uma função linear do período de degelo no lugar onde essas plantas vivem. Se x é o período de degelo (em dias) e y é a atividade de Hill (em unidade de Hill = Moles de 2,6-diclorofenolindofenol por mg de clorofila por minuto) e supondo que o comportamento é linear, encontramos a taxa de variação (isto é, a mudança da atividade física de Hill por período de degelo). Tendo o valor da taxa de variação, podemos encontrar a lei de formação da função. São fornecidos os seguintes dados: durante 100 dias são medidas 42 unidades de Hill e em 300 dias se mede 21 unidades de Hill. (Exemplo adaptado de Bachelet, 1984.)

Solução:

Nesse caso, representamos o comportamento linear da experiência por $y = ax + b$.

Com os dados $x_0 = 100$, $y_0 = 42$ e $x_1 = 300$, $y_1 = 21$, encontramos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{21 - 42}{300 - 100} = -0,105$ unidades de Hill/dia.

Essa taxa de variação é constante, dado que a função é linear (como foi obtido no exemplo acima). Assim, $a = -0,105$. Substituindo qualquer um dos pares (x_0, y_0) ou (x_1, y_1) na equação linear obtemos facilmente que $b = 52,5$. Dessa forma, a equação da reta é dada por $y = -0,105x + 52,5$.

Uma determinada cidade é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é, aproximadamente, dado por

$$f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}.$$

- Qual a razão da expansão da epidemia entre os dias terceiro e quarto?
- Qual a razão da expansão da epidemia entre os dias terceiro e oitavo?
- Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia durante o oitavo dia? (Exemplo adaptado de Flemming e Gonçalves, 1992.)

Solução:

O primeiro item mede a taxa de variação da epidemia entre os dias terceiro e quarto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{64,4 - \frac{4^3}{3} - \left(64,3 - \frac{3^3}{3}\right)}{4-3} = \frac{234,66 - 183}{1} = 51,66$$

Afirmamos, desse modo, que a epidemia está se expandindo na razão de, aproximadamente, 51 pessoas por dia.

Para o segundo item

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{64,8 - \frac{8^3}{3} - \left(64,3 - \frac{3^3}{3}\right)}{8-3} = \frac{341,34 - 183}{5} = 31,66$$ e, nesse caso, a epidemia se expande na razão de, aproximadamente, 31 casos por dia.

Já durante o oitavo dia o número de pessoas atingidas será a diferença das que foram atingidas entre os dias 7 e 8, isto é:

$$f(8) - f(7) = 64,8 - \frac{8^3}{3} - \left(64,7 - \frac{7^3}{3}\right) = 7,67.$$

Assim, entre o sétimo e o oitavo dia haverá 7 pessoas com a epidemia. Observamos que a razão de expansão da epidemia diminui com o passar dos dias.

Observação

Uma interpretação geométrica para a taxa de variação de uma função é dada pelo valor da inclinação da reta secante entre os pontos da função na qual quer se medir a taxa. Também, o conceito da taxa de variação é similar ao conceito de derivada de uma função com a diferença de que esta considera incrementos infinitesimais (para um melhor entendimento, se faz necessário trabalhar com limites, porém, este tópico não faz parte deste conteúdo). Geometricamente, a derivada é dada pela inclinação da reta tangente num ponto qualquer da função. Assim, a velocidade instantânea é um exemplo de aplicação de derivada usado na física.

3.7 Outros tipos de funções: função discreta

De mesma forma que os modelos discretos, cuja teoria será descrita no próximo capítulo, as funções discretas possuem uma série de aplicações nas áreas de biociência, saúde e estatística. Com funções como a exponencial e logarítmica, é possível descrever o comportamento de populações que mudam a cada certo intervalo no tempo. Nosso objetivo nesta seção será usar não apenas esses tipos de funções, mas todas aquelas que estudamos associadas a funções discretas. Dessa forma, completaremos todas as ferramentas necessárias para o início do próximo capítulo.

Para definirmos o que é uma função discreta, precisamos "ter ***ideia clara***" do que é um conjunto discreto.

Ao colocarmos entre aspas sobre termos ideia clara é porque queremos apenas fornecer as noções e não o conceito formal de conjunto discreto. Termos as noções é suficiente dentro dos objetivos desta disciplina.

3.7.1 Conjunto discreto

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é dito discreto se for finito ou ***enumerável***. Por sua vez, um conjunto (finito ou infinito) é enumerável se pudermos "ordená-lo de certo modo".

Formalmente, um conjunto é enumerável se é possível estabelecer uma bijeção entre o conjunto e um subconjunto de números naturais.

Vejamos este exemplo:

São discretos os conjuntos seguintes:

- $A = \left\{3, 8, -0{,}1, \sqrt{2}\right\}$, pois é um conjunto finito de números;
- $B = \left\{(1, 2, 3), m, n, rosa\right\}$ é um conjunto finito de elementos quaisquer;
- $C = \left\{n \in \mathbb{Z} / n > 5\right\} = \left\{6, 7, 8, 9, 10, \ldots\right\}$, o conjunto infinito de inteiros maiores que 5.

Os seguintes conjuntos não são discretos:

- $E = \{x \in \mathbb{R} / x > -2\} = (-2, \infty)$, números reais maiores que -2, é infinito;
- $F = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 7\}$, o intervalo de números maiores que um e menores ou iguais a 7 é um conjunto infinito.

Note que os conjuntos E e F são não enumeráveis.

Se D é discreto e D_1 é um subconjunto de D, então D_1 também é discreto. Exemplificamos isso usando o conjunto C_1 dado a seguir:

$$C = \{n \in \mathbb{Z} / n > 5\} = \{6, 7, 8, 9, 10, \ldots\},$$
$$C_1 = \{n \in \mathbb{Z} / n \geq 9\} = \{9, 10, 11, \ldots\}.$$

Como C_1 é subconjunto de C e C é discreto, podemos concluir que C_1 também é discreto.

3.7.2 Função discreta

Uma função $f : A \to B$ definida por $y = f(x)$ é considerada discreta se o conjunto A for discreto.

Como D_f é subconjunto de A, então D_f é discreto, assim podemos afirmar que uma função é discreta se tiver domínio discreto.

Vejamos algumas funções discretas construídas a partir de funções conhecidas.

Se $x \in \mathbb{N}$ e $f(x) = e^x$, $x \geq 1$, observemos que $f : A \to B$ em $A = \{x \in \mathbb{N} / x \geq 1\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Como A é discreto, então f é uma função discreta. Pela lei de correspondência, dizemos que f é uma exponencial discreta. Vejamos que Im_f também é um conjunto discreto. O gráfico abaixo foi feito com a ferramenta Excel:

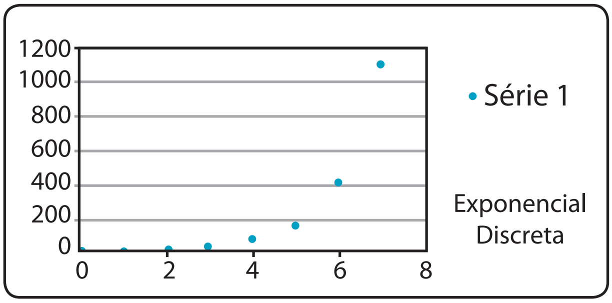


Figura 3.17: Função exponencial discreta feita em Excel.

A função $f:[-4,4]\rightarrow[0,16]$ com $f(x)=x^2$ é uma função quadrática discreta. Para gerar essa função, utilizamos incrementos de dois décimos iniciados a partir de -4. Assim, o domínio fica restrito a valores racionais x do seguinte conjunto

$$D_f=\{x\in\mathbb{Q}\,/\,x=-4+0,2n, n=0,1,\ldots,40\}.$$

Mostramos o resultado no seguinte gráfico (feito com a ferramenta Matlab, versão 6.12):

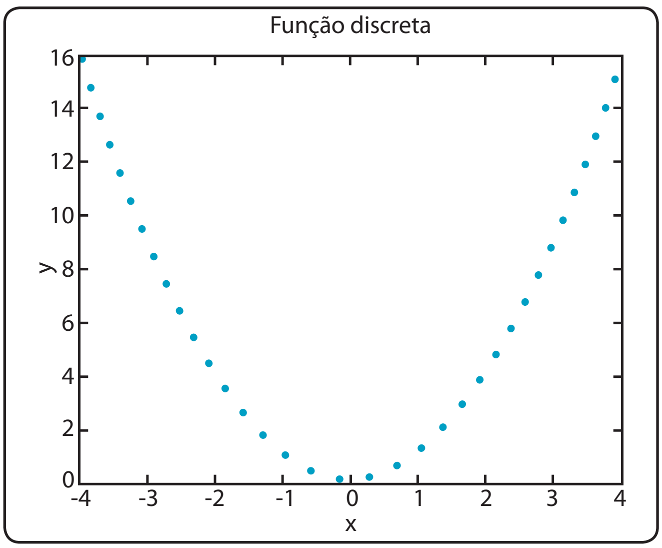


Figura 3.18: Função quadrática discreta feita em Matlab.

Matlab é um *software* matemático muito útil não apenas para construir gráficos de funções de uma ou muitas variáveis, mas, também, para auxiliar na resolução de diversos exercícios que, feitos à mão, despenderiam muito tempo. Serve também para criar aplicativos usando códigos que resolvem os mais variados problemas da ciência e engenharia. Se quiser conhecer mais detalhes desse *software*, consulte o endereço: <www.mathworks.com>.

O código usado nesse caso foi

$x=-4:0.2:4$

$y=x.\wedge 2$

$plot(x,y,'r*')$

$xlabel('x')$

$ylabel('y')$

A seguir, mostramos a função seno discreto, $y = sen(x)$, uma função trigonométrica discreta construída num conjunto de valores discretos dentro do intervalo $[-10,10]$.

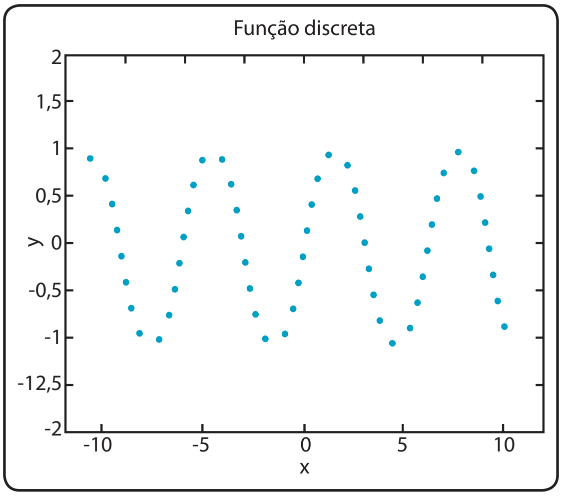


Figura 3.19 : Uma função trigonométrica discreta.

No próximo exemplo consideramos um problema de estoque de sementes de uma determinada planta. Uma situação que, embora hipotética, pode servir para descrever, com uma função discreta, um caso real.

Problema:

Seja y o número de sementes total de uma determinada espécie de planta. Considere que, em média, essa planta produz 11 sementes a cada seis meses. Acompanhando o processo durante dois anos, podemos obter a função discreta do problema e o seu respectivo gráfico (considerar que cada nova semente é guardada no estoque para ser tratada no futuro).

Solução:

Consideremos que no início ($t = 0$) a muda de uma determinada espécie é plantada. Nesse momento, o número de sementes $s(0) = 0$. Essa planta começa sua germinação após seis meses ($t = 6$). Temos, então, que, se $y = s(t)$ é o número de sementes em t meses, e que t só pode ser $6, 12, 18, 24$ etc. Dessa forma, $s(0) = 0$, $s(6) = 11$, $s(12) = 11 + 11 = 22$, $s(18) = 22 + 11 = 33$, $s(24) = 33 + 11 = 44$ etc.

Calculemos a taxa de variação dessa função em três pares de pontos entre $t = 0$ e $t = 6$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{s(6) - s(0)}{6 - 0} = \frac{11}{6}$$

entre $t = 6$ e $t = 18$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{s(18) - s(6)}{18 - 6} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$$

entre $t = 6$ e $t = 24$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{s(24) - s(6)}{24 - 6} = \frac{33}{18} = \frac{11}{6}.$$

Sendo a taxa de variação constante, podemos concluir que o comportamento dessa função é linear com inclinação $\frac{11}{6}$. A função inicia na origem ($s = 0$ se $t = 0$), então a lei de correspondência dessa função discreta será

$$y = \frac{11}{6}t,\ t = 0,\ 6,\ 12, \ldots$$

Como exercício, obtenha o gráfico da função anterior utilizando o Excel.

Observação:

Nestas duas últimas seções destacamos dois resultados importantes: a taxa de variação pode ser constante ou pode ser variável! Ao resolvermos exemplos ligados ao cotidiano de um biólogo (ou um agrônomo etc.), podemos fazer previsões para serem aplicadas nas decisões futuras, como os dados do exemplo anterior, que nos permite saber se a taxa de variação é constante, a partir desses dados saberemos com quantas sementes (em média) podemos contar para ampliar ou reduzir os custos da plantação, para continuar com o mesmo tipo de sementes ou mudar para outro tipo ou, talvez, dar continuidade ou desistir da plantação.

Resumo

A ideia principal deste capítulo foi poder lidar com situações práticas comuns em áreas como biologia ou agronomia. Por exemplo, ao termos um dado problema caracterizado por certos fenômenos de tipo discreto, podemos fazer previsões para serem aplicadas em decisões futuras. Nada disso poderia ser feito se desconhecêssemos a taxa de variação média. Sendo esse o objetivo, faz-se necessário o aprendizado das funções, seus tipos e seu comportamento (crescente ou decrescente).

Exercícios

5. Use a definição de relação e encontre outras relações possíveis diferentes do exemplo dado pelo produto cartesiano $A \times B$ em que $A = \{-1, 2, 4\}$ e $B = \{-2, 0\}$.

6. Utilizando os dados no exemplo do conjunto de gametas feminino e masculino, encontre outras relações possíveis.

7. Construa um gráfico com as relações dadas no primeiro exemplo.

8. Você pode exemplificar outras relações de elementos não numéricos?

9. Usando conjuntos infinitos A e B, você pode pensar numa outra situação prática utilizando relações?

10. Esboce um gráfico com a relação $R = A \times B \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ onde $A = \{n \in \mathbb{N} / n > 3,5\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 6\}$.

11. R é um conjuto infinito? É discreto?

12. No plano cartesiano, esboce os elementos da relação R, dada no exercício anterior.

13. Em cada item, obtenha os gráficos das funções (usando uma mesma janela gráfica nos itens a) e b).

    a) $y = x - 1$, $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = sen(x)$ usando o Graphmatica

    b) Todas as funções do item a) utilizando o Winplot

c) $y = 2, \ -2 < x < 2$ (use Graphmatica e Winplot)

d) $y = |x+1|, \ x \in [-5, 5]$ (use Graphmatica e Winplot)

Comente as facilidades e dificuldades ao trabalhar com os *softwares* (com qual trabalhou melhor, qual foi mais acessível etc.)

14. Usando os dois aplicativos, resolva o que se pede a seguir (colocando os gráficos numa mesma janela gráfica).

a) Dada a reta $y = ax + b$. Escolha cinco pares de valores a e b, respectivamente, ($a \neq 0$) e construa o gráfico;

b) anote suas observações ao mudar os valores de a, mantendo fixo um valor b;

c) anote suas observações ao mudar os valores de b, mantendo fixo um valor a.

Nas seguintes questões, se for solicitada a elaboração de gráficos, use apenas um aplicativo.

10. A função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ representa uma parábola. Escolha o conjunto de valores $\{a, b, c\}$ para se ter:

a) uma parábola voltada para cima;

b) uma parábola voltada para baixo;

c) uma parábola centrada na origem;

d) uma parábola voltada para cima e crescendo muito rapidamente;

e) uma parábola voltada para cima e crescendo devagar.

11. Usando o enunciado do problema da expansão epidêmica, encontre a razão de expansão da epidemia entre o oitavo e nono dia. Que conclusão você pode tirar com o resultado obtido?

12. A pressão exercida pela água é proporcional à profundidade em que é medida. Seja d a profundidade (metros) e p a pressão (atmosferas). Foram feitas as seguintes medidas na água do mar: $d = 98{,}0m, \ p = 10{,}21atm$. Expresse p em termos de d. Se um erro em p de menos de 1% é desprezível, o domínio da função é aproximadamente [0,1000]. Qual é a imagem correspondente? Qual é a taxa de variação da função entre os pontos $(0,0)$ e $(196, \ 20{,}42)$?

13. De acordo com Tomoféeff-Ressovsky e Zimmer , o número de mutações ligadas ao sexo relacionadas à *Drosophila melanogaster* cresce quase linearmente, com uma dose de raios-x que não exceda $6k-R$ (quilo-Roentgen). Seja x a dose medida em $k-R$ e y a taxa de mutação (percentagem). Para uma dose 0, nenhuma mutação é observada. Com uma dose de $3k-R$, a taxa de mutação é 8,4%. Estabeleça a equação para x e y. Encontre a taxa de variação dessa função para qualquer ponto (x, y) e o ponto $(3,\ 8,4)$.

14. Animais saltadores, tais como o gato, toninha (porco marinho) ou a pulga, caem descrevendo as curvas dadas pelas funções $f_g(x) = -x^2 + 2$, $f_t(x) = -x^2 + 1{,}5$ e $f_p(x) = -(x-1)^2$. O deslocamento na horizontal é dado pela distância entre a origem de coordenadas e o momento em que cada um deles chega ao piso. Supondo que cada um deles parte de diferentes alturas da mesma vertical, qual é o deslocamento determinado? (Considere que o gato parte de 2 m da vertical, a toninha de 1,5 m e a pulga se impulsiona desde a origem). Encontre, também, as respectivas taxas de variação do gato e da toninha entre o ponto de partida na vertical e o ponto de chegada na horizontal.

15. Seja y o número de sementes total de uma determinada espécie de planta. Considere que, em média, essa planta produz 24 sementes a cada oito meses. Acompanhando o processo durante dois anos, pede-se obter a função discreta do problema e o seu respectivo gráfico (tendo em conta que cada nova semente é guardada no estoque para ser tratada no futuro).

16. Seja y o número de filhotes de um animal que se reproduz a cada dois anos. Se em cada ninhada o animal ganha em média três filhotes, encontre a função discreta obtida ao longo de 12 anos e o número total de filhotes no tempo $t = 12$ anos. Faça o gráfico no período de oito anos. Nota: não considere a reprodução dos filhotes quando adultos, isto é, contabilizamos apenas o número de filhotes do animal.

17. Considere o problema do número de sementes total de uma determinada espécie de planta e obtenha o gráfico da função discreta.

18. Considere que o número de insetos y aumenta quadraticamente em função dos meses numa dada plantação. Os dados colhidos

no trabalho de campo mostram que no início há insetos e que depois de três e oito meses há 33 e 198 insetos, respectivamente. Encontre a função que descreve esse comportamento. Forneça também a taxa de variação: entre os três primeiros meses e nos oito primeiros meses, o que se pode concluir?

19. Esboce a função logarítmica discreta se o domínio é dado por $\{n \in \mathbb{N} / n < 8\}$.

20. $f(x) = |x+1|$, $x \in \{0, 4, 1, \pi\}$ é uma função discreta? Justifique.

Bibliografia comentada

Introdução à matemática para biocientistas

Esse livro é ótimo pela gama ampla de exemplos relacionados com assuntos para biocientistas. Dele adaptamos alguns exemplos desenvolvidos neste capítulo.

BATSCHELET, E. *Introdução à matemática para biocientistas*. São Paulo: Interciência, 1984.

Cálculo A

Nesse livro, além da teoria aqui apresentada, há outros conteúdos próprios.

FLEMMING, D.; GONÇALVES, M. *Cálculo A*. São Paulo: Makron Books, 1992.

Fundamentos de matemática elementar

Esse livro contém muitos exercícios úteis para fixar os conteúdos deste capítulo. Trabalha muito bem com relações e deixa muito claro as diferenças que há entre elas e as funções.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar*. São Paulo: Atual Editora, 1985.

Cálculo 1

É um livro didático muito bom, que serve de complemento para o estudo das funções.

KÜHLKAMP, N. *Cálculo 1*. Florianópolis: Editora da UFSC, 2001.

Modelos Discretos

Neste capítulo apresentaremos noções de alguns conceitos (alguns deles conhecidos) que permitirão a introdução de novos tópicos para o estudo dos modelos discretos. Esses conceitos, além de incluir onde eles podem ser aplicados, serão a base do desenvolvimento das aplicações em biologia.

4.1 Introdução

No capítulo anterior, estudamos funções discretas. Neste, aproveitaremos o tópico para descrever diversos problemas na biologia (e outras áreas) que acontecem por épocas (intervalos espaçados no tempo), destacando, dessa forma, que nem todo processo biológico ocorre de forma contínua.

Um primeiro problema é o da reprodução de certas espécies. Por exemplo, as baleias se reproduzem a cada um ou dois anos, tendo um único filhote, que, ao tornar-se jovem, levará vários anos até atingir sua maturidade sexual, iniciando a reprodução de uma nova geração.

Esse problema do ciclo de reprodução relata dois casos: um que pode ser olhado como acontecendo a cada dois anos (fixando como dois anos o período de reprodução das baleias), e outro acontecendo depois de vários anos (digamos quatro ou cinco anos para que um filhote de baleia atinja a maturidade sexual).

Os gafanhotos são insetos que se reproduzem anualmente, e plantas como o abacaxizeiro, dos climas tropicais, geram anualmente os conhecidos frutos de abacaxi. Esses dois últimos exemplos não indicam que espécies animais ou vegetais tenham que aumentar sua espécie anualmente, pois também há espécies como a fêmea da cigarra que, logo após a postura dos seus ovos, acaba morrendo, isto é, não há período de reprodução dessa espécie, pois ela se reproduz apenas uma vez na vida.

Você poderia pesquisar e exemplificar quais são essas espécies? Responder a essa pergunta é muito importante, pois a sua pesquisa servirá de referência a um possível problema que você queira tocar mais adiante no trabalho final do semestre.

Agora, amigo(a) leitor(a) e estudante de biologia, você conhece muitas ***espécies de animais e/ou plantas*** que se reproduzem aproximadamente ou em média a cada seis meses, e outras que precisam de mais ou menos meses (ou talvez anos!).

Um outro problema que podemos tratar, e que veremos mais adiante, é o crescimento populacional mundial (ou por países) anual, contabilizando-o a partir de certo ano.

Uma vez fornecida esta introdução para o estudo deste capítulo, e lembrando que iremos apenas introduzir noções neste conteúdo, iniciaremos o estudo fazendo relação com as funções discretas. Tal é o caso das sequências que estudaremos a seguir.

4.2 Sequências – Noções

Vejamos o seguinte exemplo:

Para cada número natural n, é conhecido que os números pares e ímpares podem ser representados da forma $2n$ ou $2n+1$, respectivamente. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos os seguintes conjuntos de números:

$$\{2, 4, 6, 8, \ldots, 2006, \ldots, 10^6, \ldots\} \text{ e } \{3, 5, 7, \ldots, 2007, \ldots, 10^6+1, \ldots\}.$$

Ambos os conjuntos gerados são enumeráveis, pois cada um pode ser associado a um número natural da seguinte forma:

$$x(1) = 2,\ \ x(2) = 4,\ \ x(1003) = 2006 \ \text{ etc.}$$

ou

$$s(1) = 3,\ \ s(2) = 5,\ \ s(1003) = 2007 \ \text{ etc.}$$

Nesse caso, estamos descrevendo funções discretas com domínio nos números naturais $\mathbb{N}$, e imagem num subconjunto dos naturais. Essas funções discretas têm como lei de correspondência $x(n) = 2n$ e $s(n) = 2n+1$, respectivamente. Elas podem ser escritas deste modo:

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ com } x(n) = 2n \text{ e } s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ com } s(n) = 2n+1.$$

Passemos a outro exemplo:

A cada número natural associamos o seu recíproco:

$$y(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$y(2) = \frac{1}{2}$$
$$y(3) = \frac{1}{3}$$
$$\vdots$$
$$y(n) = \frac{1}{n}.$$

Novamente temos uma outra função discreta: a função recíproca discreta dada pela hipérbole equilátera discreta com os números naturais como domínio. Nesse caso, os elementos da imagem da função não são números naturais. Assim,

$$y : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ com } y(n) = \frac{1}{n}.$$

O problema do crescimento da população mundial

Alguns autores consideram que o crescimento da população mundial é exponencial. Se a taxa de crescimento é dada por r, então a cada ano seguinte esse valor será o valor da população no ano anterior mais uma proporção (segundo essa taxa) do valor da população (no ano anterior).

Considerando $P(0) = P_0$ a população inicial, num dado ano-base temos:

$$P(1) = P_0 + rP_0 = P_0(1+r)$$
$$P(2) = P_0(1+r)^2$$
$$P(3) = P_0(1+r)^3$$

e em qualquer ano t

$$P(t) = P_0(1+r)^t.$$

Como t é a variável e é um número natural, esse problema descreve uma função exponencial discreta.

Nota: Na taxa de crescimento r já é levada em consideração a taxa de natalidade b, e de mortalidade m, isto é, $r = b - m > 0$. Alguns autores denominam r como sendo a taxa de crescimento intrínseco.

Com o mesmo raciocínio do problema de crescimento da população mundial, podemos considerar a população de um dado país. Por exemplo, a população da Índia chegou a 550 milhões de pessoas em 1972, isto é, $P_0 = 550\ milhões$ quando $t = 0$ (o ano-base é 1972), com um crescimento anual aproximado de 2,4%, ou seja, $r = \frac{2,4}{100}$. Daí que $1 + r = 1,024$. A população para qualquer ano é dada por

$$P(t) = 550(1,024)^t.$$

Amigo(a) leitor(a), você poderia responder quantos milhões de pessoas havia na Índia no ano 2007?

No início da disciplina, ao falarmos de padrões numéricos, expomos alguns exemplos envolvendo os números da sequência de ***Fibonacci*** dados no conjunto:

Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, foi um matemático e comerciante da Idade Média que estudou uma grande quantidade de assuntos relacionados à aritmética e à álgebra da época (início do século XIII). Realizou um papel importante no desenvolvimento matemático na Europa nos séculos seguintes e, graças às suas contribuições, os europeus vieram a conhecer os algarismos indo-arábicos, usados nos dias atuais.

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...\}.$$

Dados os dois primeiros termos, podemos obter cada termo subsequente somando apenas os dois termos precedentes. Assim, se $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$, então $x_3 = x_2 + x_1 = 2$, $x_4 = x_3 + x_2 = 3$ etc.

Os exemplos apresentados acima são **sequências**. Porém, não é do nosso interesse aprofundarmo-nos nesse conteúdo. Estudaremos apenas algumas noções, vejamos:

Para identificar os termos de uma sequência é suficiente obtermos o termo geral dela. Assim, se os termos são:

$$x_n = 2n,\ s_n = 2n + 1 \text{ e } y_n = \frac{1}{n},$$

denotaremos essas sequências, respectivamente, por:

$$\{x_n\}, \{s_n\} \text{ e } \{y_n\}.$$

Observação

Note que uma sequência é uma função discreta, apenas com uma notação diferente, e nem toda função discreta é uma sequência. Por exemplo, a função dada pela relação $\{(1,\ 2{,}3), (5,\ \pi), (-2,\ -0{,}4)\}$ é discreta e não é uma sequência. *Você pode fornecer um outro exemplo?*

Sequência

Definição: Uma sequência é um conjunto de números que associa a cada número natural n um outro número, x_n, que pode ser ou não natural.

Denotaremos as sequências por $\{x_n\}$, onde x_n será o termo geral.

Nota:

A notação dada coloca de uma forma abreviada o conjunto de números (ou elementos) da sequência colocada numa forma estendida.

Outros exemplos de sequências são:

$$\{(-1)^3 n^3\} = \{1, -8, 27, -64,...\};$$

$$\{1^n\} = \{1, 1, 1, 1,...\};$$

$$\{(0,2)^n\} = \{0,2,\ 0,04,\ 0,008,\ 0,0016,...\};$$

$$\left\{\frac{2n}{(1+n)}\right\}, \left\{\frac{1}{n+2}\right\}, \{-n^3\}, \{(-1)^n\}.$$

Você pode colocar a forma estendida de cada uma das quatro últimas sequências?

Se uma sequência **tende a um único valor numérico** L, diremos que **a sequência converge**, caso contrário, diremos que ela diverge. Há notações matemáticas para isso: Se a sequência for convergente a L colocaremos $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, e se a sequência for divergente, diremos que $\lim_{n\to\infty} x_n$ não existe.

Dessa forma, as sequências $\{1^n\}, \{(0,2)^n\}$ convergem. Os valores de convergência são $L = 1$ e $L = 0$, respectivamente. Já a sequência $\{(-1)^n.n^3\}$ é divergente. Vejamos:

Os termos da sequência $\{1^n\} = \{1, 1, 1,...\}$ ficam no valor numérico 1, independentemente do valor n. Os termos das sequências

$$\{(0,2)^n\} = \{0,2,\ 0,04,\ 0,008,\ 0,0016,...\}$$

e

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \{1,\ 0,5,\ 0,333...,\ 0,25,\ 0,2,...,\ 0,001,...\}$$

decrescem à medida que o valor de n cresce. Vejamos. Se $n = 10.000$, $(0,2)^{10000}$ e $\frac{1}{10000} = 0,0001$ são números pequenos. Se, ainda, $n = 10^6 = 1000000$, $(0,2)^{1.000.000}$ e $\frac{1}{10^6} = 0,000001$, ou seja, seus valores nas respectivas sequências são menores ainda. E se aumentarmos os valores de n, teremos como resultado valores nas respectivas sequências bem próximos de zero! Então, podemos afirmar que os valores da sequência tendem a zero.

Já a sequência $\{(-1)^n.n^3\}$ assume valores positivos ou negativos: $\{(-1)^n.n^3\} = \{-1, 8, -27, 64, -125, ...\}$, isto é, não há tendência a valor algum!

Assim, conforme percorremos o conjunto dos termos de uma dada sequência em que os valores não tendem a um único valor ou não tendem a nenhum valor numérico, então podemos afirmar que a sequência é divergente.

Pode acontecer que os valores da sequência sejam tão grandes (positivos ou negativos) que o valor limite vá para ∞ (ou $-\infty$). Esses símbolos não são números, então não existe valor limite para a sequência, embora alguns autores afirmem que o limite é mais infinito (ou menos infinito).

A sequência de Fibonacci

Como apresentado no primeiro capítulo, a sequência de Fibonacci é dada pelos infinitos números do conjunto $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...\}$. Acontece que, dados os dois primeiros termos, podemos obter cada termo subsequente somando apenas os dois termos precedentes, mas qual é a forma do termo geral, x_n, dessa sequência?

A informação que temos é que, dados x_1 e x_2, então

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

ou

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

ou ainda

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

isto é, temos uma relação entre os termos de uma sequência que, em geral, é desconhecida. A última expressão é uma equação que podemos colocar na forma

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0.$$

Assim, cada elemento da sequência de Fibonacci satisfaz essa equação. Temos, então, um exemplo de uma **equação de diferenças**.

4.3 Equação de diferenças e modelos discretos

Uma equação de diferenças é uma expressão recorrente de termos de uma sequência que não é conhecida. Nessa expressão se encontram o termo geral, os termos anteriores e/ou os posteriores a ele, por exemplo, a equação de diferenças dada pela sequência de Fibonacci:

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0 \text{ com } x_1 = 1,\ x_2 = 1.$$

Vejamos o seguinte exemplo:

Podemos estabelecer uma equação de diferenças para obtermos a sequência dada pelos números pares $\{a_n\} = \{2n\}$:

$$\begin{aligned} &a_1 = 2 \\ &a_2 = a_1 + 2 \\ &a_3 = a_2 + 2 \\ &a_4 = a_3 + 2. \end{aligned}$$

Seguindo esse processo, obtemos:

$$a_n = a_{n-1} + 2, \text{ com } a_1 = 2.$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} &a_1 = 2 \\ &a_2 = a_1 + 2 = 2 + 2 = 2(1+1) = 2(2) \\ &a_3 = a_2 + 2 = 2(2) + 2 = 2(2+1) = 2(3) \\ &a_4 = a_3 + 2 = 2(3) + 2 = 2(3+1) = 2(4) \\ &. \\ &. \\ &. \\ &a_n = 2n \end{aligned}$$

4.3.1 Equação de diferenças lineares de primeira e segunda ordem

Nesta seção, trabalharemos apenas com equações de diferenças lineares de primeira e segunda ordem. E para ficar nesse contexto, os modelos que serão apresentados serão simples. Destacamos que eles podem adotar outras formas condizentes à realidade do problema.

Uma equação de diferenças linear de primeira ordem pode ser representada na forma:

$$ax_{n+1} + bx_n = G(n). \tag{1}$$

Já uma equação de diferenças linear de segunda ordem é representada na forma:

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = G(n). \tag{2}$$

Nas equações (1) e (2), a, b e c são valores constantes, o grau da variável x_n (e suas variantes x_{n+1}, x_{n+2}) é um (daí o porquê de elas serem chamadas lineares) e $G(n)$ é uma sequência que depende apenas dos valores de n.

Vejamos o exemplo:

Nas seguintes equações de diferenças:

a) $a_n = a_{n-1} + 2$;

b) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$;

c) $b_n.b_{n-1} - 1 - n = 0$;

d) $(x_{n+2})^2 - x_{n+1} = n^2$;

e) $x_{n+5} = -x_n$;

f) $x_{n+1} - 3(x_n)^2 - \log(n) = 0$.

As duas primeiras equações e a equação e) são lineares, e as demais são não lineares.

Existem equações de diferenças lineares e não lineares de ordem superior, por exemplo, a equação e) é linear de ordem 5.

Nota:

Se uma equação de diferenças linear é de primeira ou de segunda ordem, sempre é possível colocá-la na forma (1) ou (2). Para isso, é suficiente deslocar todos os termos da sequência no lado esquerdo e os termos livres da sequência no lado direito. Por exemplo, ao colocarmos a equação $3x_n + n^5 - 1 = -x_{n+2} + 2n$ na forma (2), obtemos $x_{n+2} + 3x_n = -n^5 + 2n + 1$. Assim, $G(n) = -n^5 + 2n + 1$.

Uma equação de diferenças é dita ser homogênea se o lado direito (a função $G(n)$) da equação for nulo, caso contrário, diremos que a equação é não homogênea.

Por exemplo:

As três primeiras equações do exemplo anterior colocadas na forma (1) são dadas por:

$$a_n - a_{n-1} = 2;$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0;$$

$$b_n.b_{n-1} = 1 + n.$$

Delas, só a segunda equação é homogênea ($G(n) = 0$); as outras são não homogêneas, com $G(n) = 2$ na primeira equação e $G(n) = 1 + n$ na terceira.

4.3.2 Equação de diferenças — Resolução

Neste ponto, conhecemos o que é uma equação de diferenças, especialmente aquelas de primeira e segunda ordem. Mas, como é que podemos resolvê-las? É possível encontrar uma sequência (ou uma função discreta) que, ao substituí-la na equação, a satisfaz?

Retomemos o problema da população mundial no seguinte exemplo:

Seja P_n uma dada população no tempo n (sem perda de generalidade, podemos considerar que o instante $n = 0$ corresponde ao ano 2004, considerado como ano-base) e que a população inicial, para $n = 0$, seja um valor não nulo dado por P_0.

Com o enunciado anteriormente apresentado, usando sequências:

$$P_n = P_{n-1} + rP_{n-1}$$

$$P_n = (1 + r)P_{n-1}$$

Obtemos uma equação de diferenças. Nessa relação recorrente, usamos o mesmo raciocínio feito ao considerá-la como função discreta:

Conhecemos P_0 (a população inicial no ano-base dado), temos, então:

$$P_1 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$

assim, continuando o processo, para qualquer ano n

$$P_n = (1+r)^n P_0.$$

Nesse caso, descrevemos os termos da sequência $\{P_n\}$ iniciando em $n = 0$:

$$\{P_0,\ P_0(1+r),\ P_0(1+r)^2, \ldots,\ P_0(1+r)^n, \ldots\}.$$

Observe que, para obter o termo geral da sequência $P_n = (1+r)^n P_0$, precisamos da condição inicial P_0 e a relação recorrente $P_n(1+r)P_{n-1}$. Se P_0 for conhecida ela pode ser assumida como sendo $P_0 = k$.

Conseguimos o mesmo resultado ao supor um crescimento exponencial da sequência da forma $P_n = k\lambda^n$; considerando que os valores λ e k serão não nulos, e substituindo na equação de diferenças dada, obtemos que $\lambda = 1+r$ e $k = P_0$, isto é, $P_n = P_0(1+r)^n$.

4.3.3 Equações de diferenças lineares de primeira ordem - Resolução

O exemplo resolvido anteriormente nos fornece a metodologia para resolvermos **equações de diferenças lineares de primeira ordem**, isto é, dada uma equação de diferenças, a incógnita x_n será encontrada por recorrência conhecendo (ou não) o primeiro valor x_0 (ou x_1).

Resolução do caso homogêneo: $ax_{n+1} + bx_n = 0$

Nesta parte, resolveremos equações de diferenças lineares de primeira ordem em que $G(n) = 0$.

Por exemplo:

Resolveremos a seguinte equação de diferenças:

$$x_{n+1} = 2x_n.$$

Supondo que x_0 é um valor constante k, isto é, $x_0 = k$, temos, então:

$$\begin{gathered} x_1 = 2x_0 \\ x_2 = 2x_1 = 2(2x_0) = 2^2 x_0 \\ x_3 = 2x_2 = 2^3 x_0 \\ \vdots \\ x_n = 2^n x_0 = k.2^n. \end{gathered}$$

A solução é $x_n = k2^n$.

Vejamos outro exemplo:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}.x_n \text{ com } x_1 = 5.$$

Neste caso, entendemos que a sequência inicia se $n = 1$. Como $x_1 = 5$, então

$$\begin{gathered} x_2 = \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}.5 \\ x_3 = \frac{1}{2}x_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.5 \\ x_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^3.5 \\ \vdots \\ x_n = 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{gathered}$$

Assim, calculando a partir de $n = 1$, os elementos da sequência são dados pelos elementos do conjunto

$$\{x_n\} = \left\{5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \dots, 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots\right\}.$$

Observação 1

No mesmo exemplo, consideremos $x_0 = 5$ quando $n = 0$. Ao encontrarmos a solução (e deixamos isso como exercício), por recorrência obtemos

$$x_n = 5.\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

A expressão do termo geral muda, mas obtemos os mesmos elementos ao iniciarmos desde $n = 0$:

$$\{x_n\} = \left\{5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \ldots, 5.\left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots\right\}.$$

Observação 2

A equação de diferenças dada pode não ter condições iniciais. Nesse caso, o valor k faz parte da solução, como mostramos no primeiro exemplo desta seção.

Resolução do caso não homogêneo: $ax_{n+1} + bx_n = G(n)$

Dada a equação (1), consideramos $G(n) \neq 0$. Neste texto, consideraremos que $G(n)$ é uma função polinomial discreta em n de ordem k, isto é,

$$G(n) = c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \ldots + c_1 n + c_0.$$

A solução desse tipo de equações possui dois processos. Primeiramente, resolvemos como se fosse uma equação de tipo homogênea, obtendo a solução x_n^h. Em seguida, trataremos da parte não homogênea, obtendo uma solução dita solução particular, x_n^p. A solução geral dessa equação será dada pela soma das duas soluções, isto é,

$$x_n = x_n^h + x_n^p.$$

Escolhemos x_n^p como sendo um polinômio da mesma ordem de $G(n)$.

Vejamos o exemplo:

$$x_{n+1} = 2x_n + 1.$$

A parte homogênea da equação vem dada por $x_{n+1} = 2x_n$. Essa equação é a mesma proposta no penúltimo exemplo que teve como solução $x_n = k2^n$, isto é, $x_n^h = k.2^n$.

Para resolvermos a parte não homogênea, reconhecemos que $G(n) = 1$. Assim, escolhemos a solução particular como sendo uma constante, ela será dada na forma $x_n^p = a$. Só resta encontrarmos o valor de a. Ao substituirmos na equação dada:

$$x_n^p = 2.x_n^p + 1,$$

ou seja, $a = 2a + 1$. Daí que $a = -1$. Assim,

$$x_n^p = -1.$$

A solução geral da equação vem dada por

$$x_n = k.2^n - 1.$$

Verificando se de fato essa é a solução:

$$x_{n+1} - 2x_n = \left(k.2^{n+1} - 1\right) - 2\left(k.2^n - 1\right) = k.2^{n+1} - k.2^{n+1} - 1 + 2 = 1.$$

Desse modo, a soma do termo $(n+1)$ menos duas vezes o termo (n) da sequência é igual a 1, como proposto na equação dada.

Outro exemplo:

Vamos resolver a seguinte equação de diferenças com condição inicial $x_0 = 5$:

$$x_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)x_n + n,\ x_0 = 5.$$

A solução da parte homogênea $x_{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)x_n = 0$ é dada por $x_n^h = k.\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Aqui, ainda não levamos em consideração a condição inicial fornecida.

Para resolvermos a parte não homogênea, identificamos que o tipo de polinômio fornecido, $G(n) = n$, é linear e supomos que a solução particular procurada também é linear da forma

$$x_n^p = an + b.$$

O nosso objetivo será encontrar os valores de a e b usando x_n^p na equação dada:

$$x_{n+1}^p = \left(\frac{1}{2}\right)x_n^p + n.$$

Como $x_{n+1}^p = a(n+1) + b$, então,

$$a(n+1) + b = \left(\frac{1}{2}\right)(an + b) + n,$$

e como essa expressão deve ser válida para todo valor de n, ao resolver obtemos $a = 2,\ b = -4$. Dessa forma,

$$x_n^p = 2n - 4.$$

Verificando: $x_{n+1}^p - \frac{1}{2}x_n^p = \left(2(n+1)-4\right) - \frac{1}{2}(2n-4) = n.$

A solução geral da equação vem dada por $x_n = x_n^h + x_n^p$, isto é, $x_n = k\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 4$, onde o valor k é desconhecido. Encontramos esse valor usando a condição inicial $x_0 = 5$. Assim, na solução geral, quando $n = 0$, $x_0 = 5 = k\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2(0) - 4.$

Resolvendo, obtemos $k = 9.$

A solução da equação é:

$$x_n = 9\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 4.$$

Observação:

Sempre é conveniente verificar se tanto a solução geral quanto a particular satisfazem a equação dada. *Verifique se x_n satisfaz a equação dada no último exemplo*.

4.3.4 Modelos discretos e equações de diferenças de primeira ordem

Nesta seção, exibiremos modelos simples em que equações de diferenças de primeira ordem podem ser usadas. Construiremos esses modelos usando o problema da divisão celular e o crescimento populacional de insetos.

Nota:

Falamos em modelos simples porque assumimos certos pressupostos que simplificam a situação do problema real. Para isso, consideraremos que todos os parâmetros do modelo são valores constantes e trabalharemos apenas com equações de tipo linear.

Aplicação 1: O problema da divisão celular

Supondo que as células se dividem em forma sincronizada e que em cada geração n cada célula produz um número m_n de células-filhas segundo uma taxa de reprodução constante igual a r, na

Robert May

Nos dias de hoje, muitos problemas são resolvidos utilizando modelos discretos. O pesquisador que deu início a essa linha de pesquisa foi Robert May (1936). May foi presidente da Real Academia de Ciências de Londres (2000-2005) e atualmente é professor de Zoologia da Universidade de Oxford. Publicou muitos artigos usando modelos matemáticos de tipo discreto e contínuo, envolvendo diversos problemas de biologia e medicina, entre outros.

próxima geração, m_{n+1}, haverá r vezes o número de células tidas na geração atual, isto é,

$$m_{n+1} = r.m_n. \tag{3}$$

Se o número inicial de células é m_0, nos interessa conhecer quantas células haverá em qualquer geração.

Com o método aprendido anteriormente, reparamos que temos uma equação de diferenças linear de primeira ordem. Facilmente podemos encontrar que, em qualquer geração, o número de células é dado por

$$m_n = m_0 r^n. \tag{4}$$

Por exemplo:

Considerando o problema da divisão celular cuja solução é dada pela equação (4), em que o número inicial de células é $m_0 = 14$ e com taxa de reprodução igual a $r = 2,3$, teremos, na geração número quinze

$$m_n = 14(2,3)^{15} = 37.328.993,3 \approx 37.328.993 \ \textit{células}.$$

Aplicação 2: Crescimento populacional de insetos

fecundidade: ou capacidade de produzir descendentes.

probabilidade de sobrevivência: ou probabilidade de atingir o estado adulto.

É conhecido que a ***fecundidade*** e a ***probabilidade de sobrevivência*** de uma dada espécie dependem de vários fatores, entre eles:

- condições do hábitat ou do ambiente;
- qualidade dos alimentos;
- tamanho da população;
- condições climáticas etc.

Consideramos também que os estágios do ciclo de vida da espécie possam ser descritos por várias equações de diferenças.

Com essas considerações e a modo de exemplo, nesta seção modelaremos, de uma forma simples, com um modelo discreto, a reprodução de um tipo de inseto.

Interações em populações, o crescimento de uma bactéria, a forma como se dispersam poluentes no ar etc. são descritos com modelos contínuos e não discretos. As funções que resolvem os equacionamentos do dado modelo não serão funções discretas, cujos gráficos são pontos, mas sim funções, cujos gráficos são curvas lisas, como as obtidas no uso dos *softwares* usados no capítulo de funções.

Reprodução do pulgão do choupo (WITHAM, 1980)

As fêmeas do tipo pulgão do choupo (*Poplar gale aphidi*) usam as folhas das árvores ao colocarem seus ovos. Após a eclosão destes, apenas uma fração da prole sobrevive até atingir o estágio adulto.

No modelo a ser feito consideraremos as seguintes variáveis e parâmetros:

- a_n: número de fêmeas adultas na $n-ésima$ geração;
- a_0: número inicial de fêmeas;
- p_n: número de elementos da prole (ou filhos) na $n-ésima$ geração;
- m: taxa de mortalidade dos jovens pulgões;
- f: número de elementos da prole por pulgão fêmea;
- r: fração dos pulgões fêmea no total de adultos pulgões.

O número de filhos na próxima geração depende do número de fêmeas adultas na $n-ésima$ geração, isto é:

$$p_{n+1} = f.a_n. \tag{i}$$

Sendo m a fração de mortos dos jovens pulgões, então $(1-m)$ será a fração dos sobreviventes, dessa forma, o número de sobreviventes que atingem a fase adulta é dado por $(1-m)p_{n+1}$. Então, o número de fêmeas desses adultos, na próxima geração, será

$$a_{n+1} = r(1-m)p_{n+1}. \tag{ii}$$

usando (i) em (ii)

$$a_{n+1} = r(1-m).f.a_n. \tag{iii}$$

A relação (iii) nos fornece o número de adultas fêmeas na próxima geração da população dos pulgões. Essa relação nos fornece o modelo que descreve a reprodução dessa população de insetos.

Obtivemos a seguinte equação de diferenças linear de primeira ordem:

$$a_{n+1} = r(1-m)f.a_n,\ a_0 \text{ conhecido}.$$

A solução dessa equação vem dada por

$$a_{n+1} = (r(1-m)f)^n a_0.$$

Vejamos este exemplo:

No problema descrito anteriormente consideremos que o número inicial de fêmeas $a_0 = 122$; a taxa de mortalidade dos jovens pulgões ; o número de elementos da prole por pulgão fêmea, $f = 20$; por último, a fração dos pulgões fêmea no total de adultos pulgões $r = 0,3$. Com esses dados, nas próximas gerações teremos que o número de fêmeas a_{n+1} será dado por

$$a_{n+1} = 122(2,4)^n.$$

Quantas fêmeas haverá após cinco gerações?

Notas:

- Observe que no modelo consideramos duas variáveis, a_n e p_n, para representar os estágios de fêmeas adultas e jovens pulgões, respectivamente.
- Nesse tipo de modelo consideramos os seguintes dois supostos adicionais: i) as gerações não se sobrepõem, ii) os adultos morrem ou são totalmente substituídos pelos filhos em intervalos fixos.

4.3.5 Equações de diferenças lineares de segunda ordem - Resolução

No contexto desta disciplina, apenas trataremos como resolver uma equação de diferenças de segunda ordem linear, em que a parte não homogênea seja dada por uma constante, isto é, resolveremos equações da forma:

$$a_2 x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = d. \qquad (5)$$

A equação (5) é dada numa forma geral. Nela, consideramos a_0, a_1, a_2 e d e como sendo valores conhecidos com $a_2 \neq 0$.

Entendendo que já aprendeu a resolver qualquer equação de diferenças de primeira ordem, você pode justificar por que a_2 deve ser não nulo?

Por exemplo:

A sequência de Fibonacci é obtida pela solução de uma equação de diferenças. Já falamos que essa equação é dada por

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0,$$

exemplificando uma equação de diferenças de segunda ordem linear.

Mas, como podemos resolvê-la? Veremos isso aprendendo como resolver a equação (5) em ambos os casos: homogêneo e não homogêneo.

Resolução: Caso homogêneo

A parte homogênea da equação 5 vem dada por:

$$a_2 x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0. \qquad (6)$$

Para resolvê-la, consideramos que a solução é dada na forma:

$$x_n = k.\lambda^n. \qquad (7)$$

Onde k e λ são não nulos. Substituindo esse expressão em (6), obtemos

$$a_2 k\lambda^{n+2} + a_1 k\lambda^{n+1} + a_0 k\lambda^n = 0.$$

Colocando $k\lambda^n$ em evidência e eliminando-a da equação, obtemos uma equação quadrática que será conhecida como **equação característica**:

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \qquad \text{(i)}$$

As soluções dessa equação são denominadas **raízes características**. Essas soluções são dadas por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}.$$

Por exemplo:

A equação característica da equação de diferenças que dá origem à sequência de Fibonacci

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$$

é dada por

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

As raízes características são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2},$$

ou seja,

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Sendo que $a_2 \neq 0$, sem perda de generalidade, podemos dividir a equação (i) por esse valor, obtendo

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \qquad \text{(ii)}$$

em que $b = \dfrac{a_1}{a_2}$ e $c = \dfrac{a_0}{a_2}$.

Desse modo, as raízes características podem ser colocadas na forma

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \qquad \text{(iii)}$$

Analisando o valor do discriminante $\Delta = b^2 - 4c$, teremos que

a) as raízes são reais e diferentes se $\Delta > 0$;

b) as raízes são reais e iguais se $\Delta = 0$;

c) as raízes são complexas se $\Delta < 0$.

Significa que há três possibilidades de solução para a equação (6).

Vejamos cada uma delas:

Caso a) raízes reais e diferentes

Esse caso é simples, a solução geral da equação de diferenças é dada pela combinação linear das funções exponenciais encontradas:

$$x_n = k_1\lambda_1^n + k_2\lambda_2^n.$$

Os valores k_1 e k_2 se deixam indicados ou serão encontrados pelas condições inicias (x_1, x_2 ou x_0, x_1) do problema.

Por exemplo:

Ao resolver a equação de diferenças

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0.$$

(o exemplo da equação que dá origem à sequência de Fibonacci), encontramos que as raízes da equação característica são $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, isto é, são reais e diferentes.

A solução virá dada por

$$x_n = k_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + k_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Observação:

Se o problema prático é o da proporção áurea, conhecemos que as raízes obtidas só podem ser positivas. (*Lembra de suas leituras no Capítulo 1?*) Assim, descartamos a segunda raiz, que é negativa, e a solução acaba tendo a seguinte forma:

$$x_n = k_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Vejamos outro exemplo:

Resolvendo $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 0$, obtemos como raízes características $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 2$. A solução é dada na forma

$$x_n = k_1 5^n + k_2 2^n.$$

Ao considerarmos as condições iniciais $x_1 = 5$ e $x_2 = 10$, podemos obter os valores de k_1 e k_2. Vejamos,

Para : $n = 1$: $5 = 5k_1 + 2k_2$.

Se : $n = 2$: $10 = 25k_1 + 4k_2$.

Ao resolvermos o sistema de duas equações nas incógnitas k_1 e k_2, obtemos o resultado $k_1 = 0$ e $k_2 = \frac{5}{2}$. Daí que a solução deste exemplo é:

$$x_n = \frac{5}{2}\cdot 2^n = 5.2^{n-1}.$$

Verificando se essa solução satisfaz a equação de diferenças dada, teremos certeza que a solução obtida está correta! De fato,

$$x_{n+2} - 7x_{+1} + 10x_n = 5.2^{n+1} - 7(5.2^n) + 10(5.2^{n-1}) = 10.2^n - 35.2^n + 25.2^n = 0$$

Outro exemplo:

Ao resolvermos $x_{n+2} - x_n = 0$, obtemos a seguinte equação característica

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

assim, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. A solução é dada na forma

$$x_n = k_1 + k_2(-1)^n.$$

Caso b) raízes reais e iguais

Havendo apenas uma raiz característica $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, a solução geral virá dada na forma

$$x_n = k_1\lambda^n + k_2 n\lambda^n.$$

Vejamos o exemplo:

A equação $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$ com $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ tem como equação característica $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ e raízes $\lambda_{1,2} = 1$. A solução é $x_n = k_1 + nk_2$. Substituindo as condições iniciais, teremos que resolver o seguinte sistema de ordem dois:

$$1 = k_1 + k_2$$
$$2 = k_1 + 2k_2.$$

Com solução $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Daí que a solução vem dada por

$$x_n = n.$$

Nota:

A justificativa do porquê a solução adota a forma fornecida no caso b) depende de certas propriedades vindas do princípio de superposição e da álgebra linear. No nível que esta disciplina está sendo fornecida, esses conceitos fogem dos nossos objetivos.

Com o objetivo de estudarmos o último caso, neste ponto é conveniente colocarmos alguns conceitos da teoria dos números complexos.

No apêndice deste capítulo, apresentaremos de uma forma breve como obter potências de números complexos.

Caso c) raízes complexas

Ao resolvermos a equação $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$, supomos $x_n = k\lambda^n$, daí que as raízes características são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4c < 0,$$

então, temos as raízes complexas

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,$$

em que $\alpha = -\dfrac{b}{2}$ e $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.

A solução geral do problema é dada pela combinação linear das potências dos números complexos λ_1 e λ_2:

$$x_n = k_1(\alpha + i\beta)^n + k_2(\alpha - i\beta)^n.$$

Nesse ponto, aplicamos o que aprendemos com potência de números complexos.

$\alpha + i\beta = r.e^{i\theta}$ e $\alpha - i\beta = r.e^{-i\theta}$, com $r = \sqrt{a^2 + \beta^2}$ e $\theta = \arctan\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$, isto é,

$$x_n = k_1(r.e^{i\theta})^n + k_2(r.e^{-i\theta})^n$$

que, simplificando, chegamos à forma:

$x_n = r^n\left[A\cos(n\theta) + B\text{sen}(n\theta)\right]$, A e B dois valores constantes (dependentes de k_1 e k_2 que também são constantes).

Por exemplo:

Resolvendo a equação $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$, obtemos

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$
$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i,$$

daí $\alpha = 1$, $\beta = 1$, assim $r = \sqrt{2}$ e $\theta = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$. Então,

$$x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left[A\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + B\text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right].$$

Resolução: Caso não homogêneo

Considerando a equação dada por (5), e conforme comentamos no início desta seção, apenas estudaremos equações de diferenças de segunda ordem linear onde G_n é constante, $G(n) = d$ com $d \neq 0$. Usando o mesmo princípio no caso das equações de primeira ordem, resolveremos primeiro a parte homogênea, obtendo x_n^h e depois a parte não homogênea, obtendo a solução particular, x_n^p, assim a solução geral virá dada por $x_n = x_n^h + x_n^p$.

Vejamos o seguinte exemplo:

Resolvendo a equação $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 7$, obtemos a solução da parte homogênea $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$, feita no exemplo anterior:

$$x_n^h = \left(\sqrt{2}\right)^n.\left[A\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + B\text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right].$$

Encontremos agora a solução particular.

Como antes, supomos que x_n^p é um valor constante c que, ao substituir na equação, nos forneça

$$x_{n+2}^p - 2x_{n+1}^p + 2x_n^p = 7,$$

ou seja, $c - 2c + 2c = 7$. Nesse caso, o valor de $c = 7$, isto é, $x_n^p = 7$. A solução geral é da forma

$$x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n . \left[A\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + B\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right] + 7.$$

4.3.6 Modelos discretos e equações de diferenças de segunda ordem

A modo de aplicação, nesta seção exibiremos dois modelos discretos em que se usam equações de diferenças de segunda ordem: o problema da reprodução dos coelhos e a propagação anual de plantas.

Aplicação 1: O problema da reprodução dos coelhos

Pressupostos do problema

- Cada par (fêmea e macho) de coelhos pode reproduzir apenas um par (dois filhotes), que atinge maturidade sexual aos dois meses de idade;
- Supondo que todos os coelhos são férteis, considera-se que eles se reproduzam a cada mês;
- Na reprodução, eles geram exatamente um novo par de coelhos;
- Todos os coelhos sobrevivem.

Após n gerações, quantos pares de coelhos podem ser reproduzidos pelo par inicial, se supomos que a cada mês cada par dá origem a um novo par de coelhos que ficam reprodutivos no segundo mês?

Esse problema foi proposto e resolvido por Fibonacci em 1202 e se encontra no seu livro denominado *Liber Abacci*. Ele propõe o problema da seguinte forma: “Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano? Um homem tem um par de coelhos em um ambiente inteiramente fechado. Desejamos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados deste par em um ano, se de um modo natural a cada mês ocorre a reprodução de um par novo e um par novo começa a reproduzir coelhos quando completa dois meses de vida”.

Variáveis:

R_n^0 = número dos novos pares nascidos na geração n;

R_n^1 = número dos pares com um mês de vida na geração n;

R_n^2 = número dos pares com dois meses de vida na geração n.

Inicialmente, temos $R_1^0 = 1$ e $R_2^0 = 1$.

número dos novos pares nascidos na próxima geração	=	número dos novos pares nascidos na geração n	+	número dos novos pares nascidos na geração anterior

Equacionando:

$$R_{n+1}^0 = R_n^0 + R_{n-1}^0.$$

Assim, para conhecer o número de coelhos em cada geração, devemos resolver essa equação de diferenças de segunda ordem. Ao mudarmos de variável, trocando R por x e tirando o superíndice, a equação adota a seguinte ***forma***:

Lembra que ela equivale à equação $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$?

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}.$$

A equação foi resolvida anteriormente, apenas estava colocada na forma

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0,$$

cuja solução é

$$x_n = k_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + k_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Agora, com os dados do problema, adicionamos as condições iniciais: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Ao usarmos um pouco de álgebra, encontramos que $k_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $k_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Assim, chegamos à seguinte solução final:

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5.2^n}\cdot\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right].$$

Por favor, você pode conferir esse resultado?

Em termos da variável proposta no início do problema, a resposta é:

$$R_n^0 = \frac{\sqrt{5}}{5.2^n} \cdot \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n \right].$$

Aplicação 2: Propagação anual de plantas (EDELSTEIN, 1988)

Nesta aplicação das equações de diferenças de segunda ordem, formularemos um modelo discreto para a propagação anual de plantas. O problema aqui proposto está no contexto da realidade climática do hemisfério norte.

Anualmente, certas plantas produzem sementes no final do verão. As plantas florescem, murcham e morrem, levando a sua "prole adormecida" (ou dormente) na forma de sementes que sobrevivem ao inverno para dar origem a uma nova geração. Na primavera, uma certa fração das sementes germinam. Algumas podem permanecer dormentes por um ou mais anos e depois reviver. Outras podem se perder devido à predação por animais, doenças ou pelas condições climáticas. Uma população suficientemente grande deve ser renovada ano após ano, tanto para sobrevivência das plantas quanto para a conservação da espécie.

Uma complicação desse problema é o fato de que as plantas anualmente produzem sementes que podem permanecer "dormentes" por vários anos, até germinarem. O problema requer, então, uma sistematização. Devemos ter as seguintes informações: a população de plantas e a reserva de sementes de vários anos no banco de sementes.

Resolveremos este problema em várias etapas.

Primeira parte: Colocando o problema

As plantas produzem sementes até o fim do crescimento numa estação depois da qual elas morrem. Considerando o verão (mês de agosto), uma fração daquelas sementes sobreviverá ao inverno. Outra fração germinará no começo da primavera (maio), dando origem à nova geração de plantas. (A fração que germina depende da idade das sementes.)

Segunda parte: Parâmetros, variáveis e supostos do problema

Parâmetros:

γ : fração de sementes produzidas por plantas no verão (agosto);

α : fração das sementes de um ano que germinam na primavera (maio) produzindo sementes no verão;

β : fração das sementes de dois anos que germinarão em maio;

σ : fração das sementes que sobrevivem num dado inverno.

O banco de sementes muda muitas vezes durante o ano, como resultado da:

- germinação de algumas sementes;
- produção de sementes novas;
- idade das sementes e mortalidade parcial.

Suposto:

Não serão consideradas as sementes com mais de dois anos de idade.

Variáveis:

p_n : número de plantas na geração n;

s_n^1 : número de sementes de um ano de idade em abril (antes da germinação);

s_n^2 : número de sementes de dois anos de idade em abril (antes da germinação);

$\overline{s_n^1}$: número de sementes restantes de um ano de idade em maio (após algumas terem germinado);

$\overline{s_n^2}$: número de sementes restantes de dois anos de idade em maio (após algumas terem germinado);

s_n^0 : número de sementes novas produzidas em agosto.

Observe que os superíndices referem-se à idade das sementes, s_n^0, s_n^1 e s_n^2: as novas, de um ano e de dois anos, respectivamente.

Terceira parte: As equações

Em maio, uma fração α de sementes de um ano e uma fração β de sementes de dois anos produzem plantas, isto é:

$p_n =$ plantas de sementes com um ano + plantas de sementes com dois anos

$$p_n = \alpha.s_n^1 + \beta.s_n^2 \tag{1a}$$

O banco de sementes é reduzido como resultado da germinação. Para cada classe de idade, temos:

$$sementes\ restantes =$$
$$= (fração\ que\ não\ germinou) \times (número\ de\ sementes\ em\ abril)$$

assim,

$$\overline{s_n^1} = (1-\alpha).s_n^1 \tag{1b}$$
$$\overline{s_n^2} = (1-\beta).s_n^2 \tag{1c}$$

Em agosto, novas sementes (as de zero ano) são produzidas em uma fração γ por planta:

$$s_n^0 = \gamma p_n \tag{1d}$$

Depois do inverno, o banco de sementes muda por mortalidade e pela idade (sementes novas na geração n terão um ano de idade na próxima geração – geração $n+1$). Assim, teremos que

$$s_{n+1}^1 = \sigma s_n^0 \tag{1e}$$

$$s_{n+1}^2 = \sigma \overline{s_n^1} \tag{1f}$$

Quarta parte: Arrumando as equações

Usaremos as equações dadas desde 1a) até 1f) para montarmos o modelo e obtermos uma equação de diferenças de segunda ordem para as plantas p_n. Utilizaremos a equação 1d) para simplificar a equação 1e):

$$s_{n+1}^1 = \sigma\gamma p_n \tag{2}$$

Similarmente, usando 1b) na equação 1f):

$$s_{n+1}^2 = \sigma(1-\alpha)s_n^1 \tag{3}$$

Utilizando a equação 1a) para a geração $n+1$ e substituindo nela as dadas por (2) e (3):

$$p_{n+1} = \alpha . s^1_{n+1} + \beta . s^2_{n+1}$$

$$p_{n+1} = \alpha\sigma\gamma p_n + \beta\sigma(1-\alpha)s^1_n, \qquad (4)$$

usando (2) em (4):

$$p_{n+1} = \alpha\sigma\gamma p_n + \beta\sigma(1-\alpha)(\sigma\gamma p_{n-1})$$

ou

$$p_{n+1} = \alpha\sigma\gamma p_n + \beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma p_{n-1} \qquad (5)$$

Obtendo a equação (5), o objetivo foi atingido, conseguimos uma equação de diferenças de segunda ordem para a variável p_n. Essa equação é linear, homogênea e simples de se resolver.

Por exemplo:

Com o problema relatado anteriormente e considerando os seguintes parâmetros $\gamma = 500$, $\alpha = 0,75$, $\beta = 0,02$ e $\sigma = 0,25$ para uma dada espécie de plantas, a equação (5) adota a seguinte forma:

$$p_{n+1} = 0{,}1875\gamma p_n + 0{,}00031\gamma p_{n-1}.$$

Nessa expressão, o valor de γ (número de sementes produzidas por plantas no verão) será mantido estrategicamente pendente.

Quinta parte: Solução da equação (5)

Considerando $a = \alpha\sigma\gamma$ e $b = \beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma$, ao resolvermos a equação (5) obtemos a seguinte equação característica:

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0$$

cujas raízes características são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b}}{2} = \frac{\sigma\gamma\alpha\left(1 \pm \sqrt{1+\delta}\right)}{2},$$

com

$$\delta = \frac{4\beta(1-\alpha)}{\gamma\alpha^2} = \frac{4}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right).$$

Como todos os parâmetros são positivos, o valor δ é positivo se $\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) > 0$, isto é, $\alpha < 1$, e com isso haverá duas raízes λ_1 e λ_2 reais e diferentes!

Levemos em consideração as magnitudes dos valores para λ_1 e λ_2, a partir do valor $\delta = \frac{4}{\gamma}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)$. Se o valor $\frac{\beta}{\alpha}$ for muito pequeno, isto é, β muito pequeno e o valor γ - número de sementes por plantas - for grande, então o valor δ pode ser considerado desprezível ($\delta \approx 0$). Assim, as raízes são:

$$\lambda_1 = \frac{\sigma\gamma\alpha\left(1+\sqrt{1}\right)}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{\sigma\gamma\alpha\left(1-\sqrt{1}\right)}{2},$$

isto é:

$$\lambda_1 = \sigma\gamma\alpha \text{ e } \lambda_2 = 0.$$

A solução da equação é dada por $p_n = k_1(\lambda_1)^n$ ou

$$p_n = k_1(\sigma\gamma\alpha)^n,$$

a propagação das plantas será possível se $\sigma\gamma\alpha > 1$. Desse modo

$$\gamma > \frac{1}{\sigma\alpha}. \tag{6}$$

Vejamos outro exemplo:

Nas condições do exemplo anterior e $\gamma > \frac{1}{\sigma\alpha}$ consideramos diversos valores para $\gamma = 500, 1000, 3000$. A magnitude δ assumirá, respectivamente, os valores $\delta = 0{,}008,\ 0{,}004,\ 0{,}001$. Assim, podemos aproximar o valor da raiz $\sqrt{1+\delta} = 1$ e obtermos para $\gamma = 500$ as seguintes raízes características, $\lambda_1 = 93{,}75$ e $\lambda_2 = 0$. A solução da equação é dada por

$$p_n = k_1(93{,}75)^n.$$

Algumas interpretações biológicas:

A relação dada em (6) diz que haverá propagação de plantas se o número de sementes por plantas for maior que $\frac{1}{\sigma\alpha}$. Observemos que a quantidade $\sigma\gamma\alpha$ representa o número de sementes por plantas que atualmente sobrevivem e germinam no ano seguinte (assim, no último exemplo, sobreviverão aproximadamente 93 sementes!). A aproximação $\beta \approx 0$ significa que a planta mãe pode somente garantir sua própria substituição se tiver possibilidade de pelo menos ter uma semente semelhante germinada.

Se β não for desprezível, podemos demonstrar que uma condição para o crescimento da população virá dada por

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)}. \tag{7}$$

Assim, as relações (6) e (7) fornecem condições para a propagação das plantas. Observe que essa relação será igual à dada por (6) se β for nulo. *Você percebe agora por que mantivemos o valor de γ estrategicamente?*

Observação:

A equação (5) poderia ser obtida de várias formas. Uma forma alternativa é montando um sistema de duas equações de diferenças de primeira ordem nas variáveis s_n, p_n, conduzindo ao conceito de sistemas de equações de diferenças (EDELSTEIN, 1988), conceitos estes que não serão estudados neste livro.

Existem pesquisadores do Brasil (e do exterior) que publicaram e divulgaram artigos de problemas modelados usando esses tipos de equações, em revistas e eventos de caráter nacional e internacional. O(a) leitor(a) interessado(a) pode encontrar parte dessa informação em Götzinger (2007).

Por outro lado, a Embrapa e a Epagri são duas instituições que, junto aos múltiplos problemas por resolver e à enorme quantidade de dados que possuem, usam essa e outras teorias para trabalhar com ***modelos discretos e contínuos***.

Teoria também aplicada na área da economia.

Resumo

Com o conhecimento de sequências (um caso particular de funções discretas), pudemos estabelecer equações cujas soluções são sequências. Equações desse tipo são denominadas equações de diferenças e servem para descrever comportamentos de diversos problemas em que os processos em questão não são contínuos. Matematicamente, para resolver esses problemas utilizamos modelos discretos, o objetivo final deste livro. Neste capítulo, apresentamos várias aplicações usando esse tipo de modelos, mostrando, assim, uma forma determinística de resolver problemas na biociência. Enfatizamos que as aplicações apresentadas neste capítulo foram obtidas do livro de Leah Edelstein (1988), nas seções referentes a modelos discretos.

Exercícios

4. Faça o gráfico das funções discretas dadas neste capítulo: $x : \mathbb{N}-\{0\}$ com $x(n)=2n$, $s : \mathbb{N}-\{0\} \to \mathbb{N}-\{0\}$ com $s(n)=2n+1$ e $y : \mathbb{N}-\{0\} \to \mathbb{R}$ com $y(n)=\frac{1}{n}$.

5. Obtenha o gráfico da função que define o problema da população da Índia. Considere $P(t)=550(1{,}024)^t$.

6. Faça o gráfico da função do problema da população mundial considerando $r=0{,}6$. Iniciamos o problema contabilizando a partir do ano 2004, em que a população era de 36 bilhões.

7. Progressões geométricas e aritméticas são sequências? Se sua resposta é sim, obtenha o termo geral de cada uma delas.

8. Coloque as seguintes sequências na forma estendida.

   a) $\left\{\frac{2n}{1+n}\right\}$

   b) $\left\{\frac{1}{n+2}\right\}$

   c) $\left\{-n^3\right\}$

   d) $\left\{(-1)\right\}$

9. Estendendo as sequências $\left\{\frac{2n}{1+n}\right\},\left\{1+\frac{1}{n+2}\right\},\left\{-n^3\right\},\left\{(-1)^n\right\}$, verifique se elas tendem ou não a algum valor numérico.

7. No exercício 5, quais são as sequências que convergem ou divergem? Se convergir, qual é o valor L de convergência?

8. No caso dos números primos, poderemos expressá-los em termos de uma sequência? Pesquise!

9. Com as ideias do primeiro exemplo da seção 4.2, encontre uma equação de diferenças para a sequência dos números ímpares e o termo geral da mesma. Em um primeiro, caso considere $a_1 = 1$, depois considere $a_1 = 3$. Anote suas observações.

10. Discuta a homogeneidade das equações d), e) e f) dadas no exemplo da seção 4.3.1.

11. Quais das seguintes equações de diferenças são de primeira ou segunda ordem? Quais são homogêneas?

    a) $a_{n-3} + a_{n-1} = 2\,\text{sen}\left(\frac{n}{2}\right)$

    b) $x_{n+2} \cdot x_{n+1} - x_n - n^3 = 0$

    c) $y_n + y_{n-1} - 5n = 0$

    d) $x_{n+4} = 7x_{n+1}$

12. Resolva as seguintes equações de diferenças.

    a) $x_{n+1} = 3x_n,\ x_0 = 12$

    b) $M_{n+1} - 0{,}5M_n = 0,\ M_0 = 10$

    c) $4y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n = 0,\ y_1 = 2$

    d) $2x_{n+1} - x_n = 0,\ x_1 = 5$

    e) $2x_{n+1} - x_n = 5,\ x_0 = 1$

    f) $\frac{1}{2}s_{n+1} + 2s_n = 10,\ s_1 = 2$

    g) $p_{n+1} - p_n = 0,\ p_0 = 3$

    h) $y_{n+2} - 2y_{n+1} = 0,\ y_0 = 10$

13. No problema da divisão celular, quantas células haverá se consideramos $m_0 = 9$, $r = 3{,}5$ nas gerações $n = 4$ e $n = 9$?

14. Usando os mesmos dados do exemplo da aplicação 1, em qual geração será possível:

a) duplicar o número inicial de células?

b) triplicar o número inicial de células?

15. Verifique que a solução obtida no primeiro exemplo (caso a — equações de diferença de segunda ordem) satisfaz a equação de diferenças dada.

16. Obtenha os valores de k_1 e k_2 e as soluções respectivas das equações de diferença de segunda ordem, se fornecemos as condições:

 1. $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$ no penúltimo Exemplo: $x_n = k_1 5^n + k_2 2^n$.
 2. $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ no último Exemplo: $x_n = k_1 + nk_2$.

17. Verifique a solução obtida no exemplo anterior.

18. Resolva as seguintes equações de diferenças e verifique cada solução.

 a) $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0,\ x_0 = 2,\ x_1 = 5$

 b) $x_{n+1} - 5x_n + 4x_{n-1} = 0,\ x_0 = 9,\ x_1 = 5$

 c) $x_n - x_{n-2} = 0,\ x_1 = 3,\ x_2 = 5$

 d) $x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = 0,\ x_0 = 6,\ x_1 = 3$

19. Encontre a solução das seguintes equações de diferenças de tipo homogêneo e não homogêneo;

 a) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 3$

 b) $x_{n+2} - 12x_{n+1} + 35x_n = 2$

 c) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 4$

 d) $2x_{n+2} + 2x_{n+1} + 5x_n = 0$

20. Usando os dados do segundo exemplo da propagação anual de plantas, como fica a solução p_n nos casos $\gamma = 1000,\ 3000$? E se considerarmos $k_1 = 30$ (número de plantas na primeira geração), quantas plantas haverá na terceira e sexta geração em ambos os casos?

21. Usando os dados do exercício 20, considere diversos valores de k_1, número de plantas, p_n em diversas gerações, como indicado abaixo:

   a) $k_1 = 30$ e p_n na quinta e sétima geração;

   b) $k_1 = 20$ e p_n na terceira e sexta geração;

   c) $k_1 = 50$ e p_n na segunda e sétima geração.

22. Plote os gráficos dados por p_n usando algum *software* e tire conclusões de suas observações. Considere:

   a) $k_1 = 30$; b) $k_1 = 20$; c) $k_1 = 50$.

Bibliografia comentada

Ensino-aprendizagem com modelagem matemática

O livro apresenta a modelagem matemática como metodologia para o ensino-aprendizagem, ferramenta muito útil para o professor em sala de aula. Predominam os modelos contínuos, e a teoria usada para resolver equações de diferenças é muito breve.

BASSANEZI, R. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* São Paulo: Contexto, 2002.

Mathematical models in biology

O livro apresenta muitos problemas da área de biociências usando funções discretas e contínuas. Os modelos usados são determinísticos e, para resolvê-los, utiliza-se desde as equações de diferenças até as equações diferenciais parciais. Embora existente apenas na versão em inglês, com certo rigor matemático, mostra de uma forma muito pedagógica como problemas da biociências podem ser vistos numa forma quantitativa e qualitativa.

EDELSTEIN, L. *Mathematical models in biology*. New York: Random House, 1988.

Modelagem de problemas biológicos usando equações de diferenças

Numa forma detalhada, aliada ao rigor matemático, esse trabalho de conclusão de curso apresenta a teoria das equações de diferenças incluindo sistemas com equações de diferenças. Exibe a metodologia com muitos exemplos e utiliza o recurso computacional para mostrar graficamente os resultados dos problemas propostos.

GÖTZINGER, H. *Modelagem de problemas biológicos usando equações de diferenças.* Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento de Matemática, UFSC, Florianópolis, 2007.

*Um número complexo é conhecido também pelo seu módulo $r = |z|$ e o seu argumento θ, dado por um ângulo **medido em radianos**. Dessa forma, o número complexo é denotado por $z = a + ib = r(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)$. Colocando esse número de coordenadas (a,b) no plano complexo, estaremos traçando um segmento dirigido que inicia na origem e termina em (a,b). Assim, o ângulo θ é determinado pela inclinação que esse segmento faz com o eixo das abscissas do plano complexo, como mostrado na Figura 4.1.*

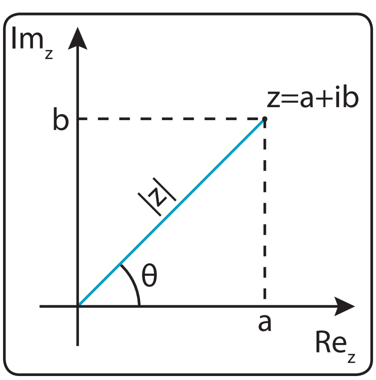


Figura 4.1 - O plano complexo.

Apêndice: Noções da teoria dos números complexos

Potência de números complexos

Precisamos de algumas noções da teoria dos números complexos para determinar sua potência.

Considerando $i = \sqrt{-1}$ como sendo a unidade imaginária, um número complexo, z, vem dado na forma

$$z = a + ib$$

a e b são conhecidos como a parte real e a parte imaginária do ***número complexo***, respectivamente. O módulo de z, $|z|$, é dado por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Vejamos o exemplo:

Os números $z_1 = 3 + 4i,\ z_2 = 10i$ têm como módulo 5 e 10, respectivamente.

A tangente do ângulo (em radianos), $\tan(\theta)$, que um número complexo define (no plano complexo composto pelo eixo real e o eixo imaginário) é dado por $\tan(\theta) = \dfrac{b}{a}$. Esse ângulo sempre é considerado no sentido anti-horário e iniciando no eixo real. Assim, as tangentes dos ângulos definidos pelos números complexos z_1 e z_2 do exemplo anterior são, respectivamente, $\tan(\theta_1) = \dfrac{4}{3}$ e $\tan(\theta_2) = \dfrac{10}{0} = +\infty$, então, $\theta_1 = \dfrac{37\pi}{180}$ e $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Um número complexo, $z = a + ib$, pode ser representado exponencialmente a partir do seu ângulo θ e o seu módulo r:

$$z = r.\exp(i\theta) \text{ ou } z = re^{i\theta}, \text{ com } r = |z| \text{ e } \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

Aceitando que a exponencial imaginária, $e^{i\theta}$, é dada por

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta),$$

a potência n de um número complexo $z = a + ib$ será dada por $z^n = (re^{i\theta})^n$, ou

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

o que é equivalente ao valor

$$z^n = r^n \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)$$

Vejamos:

Vamos praticar como encontrar a potência de números complexos!

Para encontrar $(z_1)^2$ e $(z_2)^5$ dos números dados no exemplo acima, $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 10i$, primeiro precisamos da representação exponencial de cada número.

Como $r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ e $\theta_1 = \dfrac{37\pi}{180}$, então, $z_1 = 5e^{\left(\frac{37\pi}{180}\right)i}$.

No outro caso, $r_2 = \sqrt{0^2 + 10^2} = 10$ e $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$, então, $z_2 = 10.e^{\left(\frac{\pi}{2}\right)i}$.

Assim, $(z_1)^2 = 5^2 e^{2\left(\frac{37\pi}{180}\right)i}$ e $(z_2)^5 = 10^5 e^{\left(\frac{5\pi}{2}\right)i}$.

O último valor, $(z_2)^5$, pode ser representado na forma

$$(z_2)^5 = 10^5\left[\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right] = 10^5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 10^5 i$$

Notas:

- Uma forma mais simples de encontrar a potência $(10i)^5$ é diretamente: $(10i)^5 = 10^5 i^5 = 10^5 i$.
- Não esqueça: O ângulo usado ao representar números complexos está em radianos!

As noções aqui apresentadas servem para estudar o último caso das equações de diferença: raízes complexas, em que números complexos e suas potências são usados.

Espaços Finitos e Probabilidades

Neste capítulo, estudaremos apenas noções básicas de elementos de combinatória e espaços finitos de probabilidades que fazem parte do estudo da matemática não determinística. A análise combinatória nos auxilia quando trabalhamos com muitos elementos, pois se torna difícil o recurso de diagramas ou tabelas para se efetuar a contagem. Na teoria de jogos, tais como lançamentos de dados e lançamentos de moedas, por exemplo, usamos conceitos de probabilidades, eventos aleatórios etc. Dessa maneira, você aprenderá de forma bem introdutória, mas com vários exemplos, sobre como agir perante situações ao acaso utilizando probabilidades e combinatória.

5.1 Introdução

Cardano, em 1526, iniciou o estudo matemático das probabilidades. Halley, em 1693, publicou o primeiro trabalho na área de seguros de vida mostrando como calcular o valor da anuidade do seguro em termos da expectativa de vida da pessoa e da probabilidade de que ela sobreviva por um ou mais anos. A matemática dos seguros atinge um embasamento científico com os estudos de Daniel Bernoulli, em 1730, e a partir daí aparecem as primeiras grandes companhias de seguros. Bernoulli calculou o número esperado de sobreviventes após *n* anos e inovou, nessa época, calculando a mortalidade causada pela varíola em pessoas de uma dada idade.

A matemática apresentada em todos os capítulos anteriores faz parte do que conhecemos como matemática determinística. Quando a matemática não é determinística, estudam-se experiências que acontecem ao acaso e se faz uso das probabilidades para descrever tais experiências, por exemplo, quando se quer quantificar os riscos nas seguradoras. Historicamente, as probabilidades começaram com o estudo de jogos de azar, tais como roleta e cartas. O quadro abaixo traz um histórico muito breve dessa teoria.

Muitos dos conceitos aqui apresentados fazem parte do nosso cotidiano, pois cada um de nós de alguma forma esteve perante uma situação de incerteza: “Joguei uma moeda, o meu resultado será cara ou coroa?”, “Lancei dois dados, qual será a possibilidade de ter um seis como a soma dos valores na jogada?”

Sabemos que a mega-sena é o jogo que oferece os maiores prêmios duas vezes por semana, qualquer um tem a chance de se tornar milionário. Lemos e ouvimos: “São seis números sorteados, mas quem acerta quatro ou cinco números também ganha, para realizar o sonho de ser...” Será que é muito provável ganhar a mega-sena? Bom, ganhar não é impossível... mas é pouco provável!

Para respondermos aos questionamentos acima, precisamos aprender os princípios básicos da combinatória. Vejamos a seguir.

5.2 Combinatória

Dado um número finito de elementos, ***a combinatória*** consiste num conjunto de processos alternativos e simplificados de contagem desses elementos, determinando sequências.

Nesta parte, aprenderemos de quantas maneiras diferentes podemos organizar um número dado de objetos se tomamos apenas um grupo deles.

Exemplo:

As combinações das letras a, b e c, tomadas três a três, se dispõem em sequências de três elementos em seis formas:

$$abc, bac, bca, cba, acb, cab.$$

Para se proceder à contagem do total de sequências, é preciso ter atenção à ordem (que pode ou não existir) e se os elementos se repetem ou não. Em todos os processos devemos aplicar o **princípio fundamental de contagem**, que será colocado após definirmos o que é um evento.

Evento

É um acontecimento que ocorre após uma experiência dada. Por exemplo, ao lançarmos um dado, teremos seis eventos, $\{1,2,3,4,5,6\}$, obtidos ao ocorrer o lance.

Já no exemplo visto acima, a ocorrência dos eventos é dada pelo conjunto $\{abc, bac, bca, cba, acb, cab\}$.

Princípio fundamental de contagem

Se um determinado acontecimento (ou evento) pode ocorrer de n_1 maneiras diferentes e, após ter ocorrido, um segundo acontecimento pode ocorrer de n_2 maneiras diferentes, e, após esse segundo evento, um terceiro acontecimento pode ocorrer de n_3 vezes, e assim por diante, então o número de maneiras diferentes em que os acontecimentos podem ocorrer na ordem indicada é dada pelo produto dos mesmos: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \ldots$

Outro exemplo:

Bertha tem três blusas, duas camisolas e seis pares de sapatos. De quantas maneiras diferentes ela pode escolher uma blusa, uma camisola e um par de sapatos?

Solução

Bertha pode escolhê-los de $3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$ maneiras diferentes.

Vejamos agora este exemplo:

De quantas maneiras diferentes um grupo sindical de 40 pessoas pode escolher um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro? Suponha que nenhuma pessoa eleita pode ser escolhida para mais de um cargo.

Solução

O presidente pode ser escolhido de 40 formas diferentes, o vice-presidente pode ser escolhido de 39 formas diferentes, pois excluímos o presidente que já foi escolhido. De forma similar, sem considerar as pessoas já escolhidas, restam 38 e 37 possibilidades diferentes para escolher o secretário e o tesoureiro, respectivamente.

Desse modo, haverá $40 \cdot 39 \cdot 37 \cdot 36 = 2.077.920$ formas diferentes de escolher os representantes do grupo sindical.

Vamos refletir: De quantas maneiras diferentes a turma de estudantes de biologia de 50 pessoas pode escolher dois representantes: titular e suplente?

5.2.1 Arranjos e permutações

O fatorial de um número n natural, $n!$, é dado pelo produto: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 1$. Por convenção, $0! = 1$. Exemplo: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

As **permutações** de n elementos consistem no número de sequências distintas que é possível obter com esses n elementos. Representa-se por $P_n = n!$.

Para calcular o número de permutações, leva-se em consideração a ordem dos n elementos em cada permutação.

Vejamos:

Martha tem uma farmácia e pretende colocar em uma prateleira oito caixas de vitamina C. De quantas maneiras distintas ela pode colocar as caixas, em fila, na prateleira?

Há 8 caixas para colocar na prateleira.

Para o primeiro lugar, temos 8 possibilidades.

Para o segundo lugar, 7 possibilidades, porque já colocamos uma caixa no primeiro lugar.

Para o terceiro lugar, 6 possibilidades, e assim por diante.

Temos, então, $P_8 = 8! = 40.320$ possibilidades para dispor as caixas de vitaminas na prateleira.

Considerando n objetos, todo agrupamento de quaisquer $r \leq n$ objetos numa dada ordem é denominado um **arranjo** dos n objetos tomados r de cada vez (ou tomados r a r).

Por exemplo:

Dado o conjunto de números $\{1,2,3,4,5\}$:

- $123, 451, 153$ são possíveis arranjos dos números tomados 3 a 3;
- $54, 12, 23, 15$ são possíveis arranjos dos números tomados 2 a 2;
- $12345, 32145, 53412$ são possíveis arranjos tomados 5 a 5 (eles também serão permutações, pois foram todos tomados de uma vez).

O número de arranjos de n objetos tomados r a r é indicado por $A(n,r)$ e é dado pela fórmula

$$A(n,r) = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

Como $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1$ e

$$(n-r)! = (n-r)(n-(r+1))...(3)(2)(1),$$

então, multiplicando e dividindo por $(n-r)!$, na fórmula para $A(n,r)$ obtemos:

$$A(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(r-1)(n-r)...3.2.1)}{(n-r)...3.2.1}$$

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Se $r = n$, o arranjo é uma permutação, então $A(n,n) = n!$, como era conhecido.

5.2.2 Permutações com repetição

O número de permutações de n objetos, dos quais n_1 são iguais entre si, outros n_2 são iguais entre si, ..., outros n_r são iguais entre si, é $\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$.

Por exemplo:

Para determinar quantas palavras de sete letras podem ser formadas usando as letras da palavra *BENZENO*, identificamos o número de letras iguais: dois E, $n_1 = 2$ e dois N, $n_2 = 2$. O número total de letras da palavra, $n = 7$. Então, o número total de permutações possíveis com as letras da palavra BENZENO é $\frac{7!}{2!2!} = 1260$.

5.2.3 Combinações

Considere uma coleção de n objetos. Uma combinação desses objetos, tomados r a r, é uma seleção qualquer de r objetos em que a ordem não interessa.

$C(n,r)$ denotará o número de combinações de n objetos r a r (tomados r a r). Em outro textos se usam notações da forma ${}_nC_r$, $C_{n,r}$ ou C_r^n.

Por exemplo:

O número de combinações dos quatro objetos a, b, c e d, tomados três a três, são abc, abd, acd e bcd, ou seja, $C(4,3) = 4$.

Temos $n = 4$ letras e, como a ordem não interessa, ao escolhermos apenas um (no caso abc e $3! = 6$) descartamos as possibilidades de escolha das outras cinco permutações ($r = 3$, $A(3,3) = 3!$) dos elementos a, b e c: bca, acb, bac, cab e cba. Assim,

$$C(4,3) = A(4,3) / A(3,3).$$

Como $A(4,3) = 24$, então $C(4,3) = \frac{24}{6} = 4$ como obtivemos no início.

Desse exemplo, deduzimos a fórmula para obter $C(n,r)$:

$$C(n,r) = \frac{A(n,r)}{A(n,r)}, \text{ isto é, } C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

$\binom{n}{r}$ é conhecido como o coeficiente binomial.

Vejamos:

Um músico escolhe três tipos de instrumentos de um total de instrumentos que há na escola de música. Deve escolher três violinos, dois saxofones e cinco flautas. Se na escola de música há disponibilidade de oito violinos, seis saxofones e dez flautas, as combinações que o músico pode fazer, na escolha de cada instrumento, são: na escolha dos violinos, $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{40.320}{6.120} = 56$ combinações possíveis; na escolha dos saxofones, $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$ possibilidades. No caso das flautas, $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$ combinações.

Assim, o músico terá, no total, $56 \cdot 15 \cdot 252 = 211.680$ maneiras de escolher os três instrumentos.

5.3 Espaço finito de probabilidades

5.3.1 Probabilidade

Definição: A probabilidade de ocorrência de um evento A é a razão entre a quantidade de possibilidades favoráveis e a quantidade total de possibilidades associadas ao evento. Denotamos por $P(A)$ o valor dessa probabilidade.

Assim, se o evento ocorre de s maneiras dentre um total de n maneiras igualmente prováveis, então $P(A) = \frac{s}{n}$.

Por exemplo:

No lançamento de um dado, a probabilidade de termos um resultado $(s = 1)$ dos seis resultados $(n = 6)$ igualmente prováveis é $\frac{1}{6}$. Nesse caso, o evento A_1 é obtermos um resultado $P(A_1) = \frac{1}{6}$.

Dos resultados obtidos, três podem ser pares e três podem ser ímpares. Então, a probabilidade de obtermos um número ímpar (evento A_2: obter um número ímpar) será:

$$P(A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

5.3.2 Espaço amostral

O conjunto S de todos os resultados possíveis de um dado experimento é denominado espaço amostral. Um resultado particular, isto é, um elemento de , é denominado amostra ou ponto amostral. Assim, um evento será um conjunto de resultados (um subconjunto de S).

Vejamos:

O lançamento de um dado é um experimento, o espaço amostral dado pelos resultados possíveis obtidos é $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Podemos escolher um evento A: um número par ocorre. O evento é dado por $A = \{2,4,6\}$ e $A \subset S$.

Observação:

Dado qualquer experimento, estamos estudando somente aqueles em que o espaço amostral é finito!

Um experimento consiste no lançamento de duas moedas. A probabilidade de se obter cara ou coroa ao lançar uma moeda é $p = \frac{1}{2}$. Como as duas moedas são lançadas ao mesmo tempo, a probabilidade de se obter um resultado é $p \cdot p = \frac{1}{4}$. A probabilidade é sempre um valor positivo ou nulo! Como os resultados possíveis são CaCa, CaCo, CoCo, em que Ca: cara, Co: coroa, e definindo os eventos como sendo

0: obter nenhuma cara no lance;

1: obter uma cara no lance;

2: obter duas caras no lance.

O espaço amostral para o experimento "quantas caras obtenho ao lançar duas moedas" será $\{2,1,0\}$. Sejam p_1, p_2 e p_3 as probabilidades de acontecimento de cada evento. Então,

- a probabilidade de se obter nenhuma cara no lance $P(0) = p_1 = \frac{1}{4}$;
- a probabilidade de se obter uma cara no lance $P(1) = p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$;
- a probabilidade de se obter duas caras no lance $P(2) = p_3 = \frac{1}{4}$.

Assim, para todo o espaço amostral, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Acabamos de enunciar as propriedades que se satisfazem num espaço finito de probabilidades. Vejamos:

Propriedade:

Seja S um espaço amostral finito $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Um espaço finito de probabilidades é obtido associando-se a cada amostra $a_i \in S$ um número real p_i, denominado a probabilidade de a_i, satisfazendo:

i) cada p_i é não-negativo, isto é, $p_i \geq 0$;

ii) a soma dos p_i é um, isto é, $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$.

Vejamos outro exemplo:

Considere o lançamento de três moedas. Em um lançamento qualquer $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Se observarmos o número de caras obtidas com o experimento, teremos como espaço amostral $\{3,2,1,0\}$; a probabilidade de se obter nenhuma cara no lance $P(0) = p_1 = \frac{1}{8}$; a probabilidade de se obter uma cara no lance $P(1) = p_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$; a probabilidade de se obter duas caras no lance $P(2) = p_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$; a probabilidade de se obter três caras no lance $P(3) = p_4 = \frac{1}{8}$.

Assim, para todo o espaço amostral, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$.

Veja que se B é o evento em que ocorre pelo menos uma cara, então $B = \{1,2,3\}$ e $P(B) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{7}{8}$.

Resumo

Neste capítulo, apresentamos somente as noções básicas de elementos de combinatória e espaços finitos de probabilidades, que fazem parte do estudo da matemática não determinística, apenas para mostrar que há problemas que não podem ser resolvidos deterministicamente. A combinatória auxilia na contagem de conjuntos com muitos elementos, e as probabilidades nos mostram o princípio da teoria de jogos. A modo de exemplo, essa teoria é usada nas empresas que trabalham com seguros.

Bibliografia Comentada

Fundamentos de matemática elementar 5: combinatória e probabilidade

HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar 5:* combinatória e probabilidade. São Paulo: Atual, 1977.

Matemática finita

LIPSCHUTZ, S. *Matemática finita.* São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1972. (Coleção Schaum).

Com essas duas referências, o(a) leitor(a) pode aprofundar vários dos conceitos que neste livro se apresentam de forma básica. Em ambos os livros, encontram-se muitos exercícios úteis para a fixação dos conteúdos.